

2015 年度センター試験 数学 2 B

第 3 問

自然数 n に対し、 2^n の一の位の数 a_n とする。また、数列 $\{b_n\}$ は

$$b_1 = 1, \quad b_{n+1} = \frac{a_n b_n}{4} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \cdots \textcircled{1}$$

を満たすとする。

(1) $a_1 = 2, a_2 = \boxed{\text{ア}}, a_3 = \boxed{\text{イ}}, a_4 = \boxed{\text{ウ}}, a_5 = \boxed{\text{エ}}$ である。

このことから、すべての自然数 n に対して、 $a_{\boxed{\text{オ}}} = a_n$ となることがわかる。

$\boxed{\text{オ}}$ に当てはまるものを、次の ① ～ ④ のうちから一つ選べ。

① $5n$ ② $4n + 1$ ③ $n + 3$ ④ $n + 4$ ⑤ $n + 5$

(2) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよう。① を繰り返し用いることにより

$$b_{n+4} = \frac{a_{n+3} a_{n+2} a_{n+1} a_n}{2^{\boxed{\text{カ}}}} b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つことがわかる。ここで、 $a_{n+3} a_{n+2} a_{n+1} a_n = 3 \cdot 2^{\boxed{\text{キ}}}$ であることか

ら、 $b_{n+4} = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}} b_n$ が成り立つ。このことから、自然数 k に対して

$$b_{4k-3} = \left(\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} \right)^{k-1}, \quad b_{4k-2} = \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}} \left(\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} \right)^{k-1}$$
$$b_{4k-1} = \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}} \left(\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} \right)^{k-1}, \quad b_{4k} = \left(\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} \right)^{k-1}$$

である。

(3) $S_n = \sum_{j=1}^n b_j$ とおく。自然数 m に対して

$$S_{4m} = \boxed{\text{タ}} \left(\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} \right)^m - \boxed{\text{チ}}$$

である。

(4) 積 $b_1 b_2 \cdots b_n$ を T_n とおく。自然数 k に対して

$$b_{4k-3} b_{4k-2} b_{4k-1} b_{4k} = \frac{1}{\boxed{\text{ツ}}} \left(\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} \right)^{\boxed{\text{テ}}(k-1)}$$

であることから、自然数 m に対して

$$T_{4m} = \frac{1}{\boxed{\text{ツ}}^m} \left(\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} \right)^{\boxed{\text{ト}}m^2 - \boxed{\text{ナ}}m}$$

である。また、 T_{10} を計算すると $T_{10} = \frac{3\boxed{\text{ニ}}}{2\boxed{\text{ヌネ}}}$ である。

(1) $2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8, 2^4 = 16, 2^5 = 32$ であることから、

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 4, \quad a_3 = 8, \quad a_4 = 6, \quad a_5 = 2$$

である。

a_n について $a_5 = a_1$ が成り立つ。また、 $a_{n+4} = a_n$ のとき、 a_{n+5} は $2^{n+5} = 2 \times 2^{n+4}$ の一の位であるため、 $2a_{n+4} = 2a_n$ の一の位の数字と等しい。よって $a_{n+5} = a_{n+1}$ となる。帰納法よりすべての自然数 n に対して

$a_{n+4} = a_n$ であることがわかる。

(2) ① を繰り返し用いることにより

$$\begin{aligned} b_{n+4} &= \frac{a_{n+3} b_{n+3}}{4} \\ &= \frac{a_{n+3}}{4} \times \frac{a_{n+2}}{4} \times \frac{a_{n+1}}{4} \times \frac{a_n}{4} \times b_n \\ &= \frac{a_{n+3} a_{n+2} a_{n+1} a_n}{2^8} b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

が成り立つことがわかる。ここで、 $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}$ はそれぞれ $2, 4, 6, 8$ のいずれかと 1 つずつ等しいため、

$$a_{n+3} a_{n+2} a_{n+1} a_n = 2 \times 4 \times 8 \times 6 = 3 \cdot 2^7$$

である。したがって

$$b_{n+4} = \frac{3 \cdot 2^7}{2^8} b_n = \frac{3}{2} b_n$$

が成り立つ。一般に自然数 m, n に対して

$$b_{n+4m} = \left(\frac{3}{2}\right)^m b_n$$

となる。このことから、自然数 k に対して

$$\begin{aligned} b_{4k-3} &= b_{1+4(k-1)} = \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} b_1 = \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} \\ b_{4k-2} &= b_{2+4(k-1)} = \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} b_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} \\ b_{4k-1} &= b_{3+4(k-1)} = \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} b_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} \\ b_{4k} &= b_{4+4(k-1)} = \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} b_4 = \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} \end{aligned}$$

である。

(3) $S_n = \sum_{j=1}^n b_j$ とおく。(2) より

$$\begin{aligned} b_{4k-3} + b_{4k-2} + b_{4k-1} + b_{4k} \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} + \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} \\ &= 3\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} \end{aligned}$$

となるため、自然数 m に対して

$$\begin{aligned} S_{4m} &= \sum_{k=1}^m (b_{4k-3} + b_{4k-2} + b_{4k-1} + b_{4k}) \\ &= \sum_{k=1}^m 3\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} \\ &= 3 \times \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^m - 1}{\left(\frac{3}{2}\right) - 1} \\ &= 6\left(\frac{3}{2}\right)^m - 6 \end{aligned}$$

(4) 積 $b_1 b_2 \cdots b_n$ を T_n とおく。自然数 k に対して

$$\begin{aligned} b_{4k-3} b_{4k-2} b_{4k-1} b_{4k} &= \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} \times \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} \times \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^{4k-4} \end{aligned}$$

であることから、自然数 m に対して

$$\begin{aligned}
T_{4m} &= \prod_{k=1}^m (b_{4k-3} b_{4k-2} b_{4k-1} b_{4k}) \\
&= \prod_{k=1}^m \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2}\right)^{4k-4} \\
&= \frac{1}{4^m} \left(\frac{3}{2}\right)^{\sum_{k=1}^m (4k-4)}
\end{aligned}$$

となる。累乗の部分を計算すると

$$\sum_{k=1}^m (4k - 4) = 4 \times \frac{1}{2} k(k+1) - 4k = 2k^2 - 2k$$

となるため、

$$T_{4m} = \frac{1}{4^m} \left(\frac{3}{2}\right)^{2k^2-2k}$$

である。また、 T_{10} を計算すると

$$\begin{aligned}
T_{10} &= T_8 \cdot b_9 \cdot b_{10} \\
&= \frac{1}{4^2} \left(\frac{3}{2}\right)^{2 \times 2^2 - 2 \times 2} \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2^4} \left(\frac{3}{2}\right)^4 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\
&= \frac{3^8}{2^{13}}
\end{aligned}$$

第3問の正解

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	
4	8	6	2	3	8	7	
ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ
3	2	3	2	1	2	1	2
タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌネ
6	6	4	4	2	2	8	13