

2015 年度センター試験 数学 2 B

第 4 問

1 辺の長さが 1 のひし形 $OABC$ において、 $\angle AOC = 120^\circ$ とする。辺 AB を $2:1$ に内分する点を P とし、直線 BC 上に点 Q を $\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{OQ}$ となるようにとる。以下、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とおく。

(1) 三角形 OPQ の面積を求めてみよう。 $\overrightarrow{OP} = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}} \vec{a} + \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{イ}}} \vec{b}$ である。

実数 t を用いて $\overrightarrow{OQ} = (1-t)\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC}$ と表されるので、 $\overrightarrow{OQ} =$

$\boxed{\text{エ}} t\vec{a} + \vec{b}$ である。ここで、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$, $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = \boxed{\text{キ}}$ であること

から、 $t = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である。

これらのことから、 $|\overrightarrow{OP}| = \frac{\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}}$, $|\overrightarrow{OQ}| = \frac{\sqrt{\boxed{\text{シス}}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である。よ

って、三角形 OPQ の面積 S_1 は $S_1 = \frac{\boxed{\text{ソ}} \sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{チツ}}}$ である。

(2) 辺 BC を $1:3$ に内分する点を R とし、直線 OR と直線 PQ との交点を T とする。 $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表し、三角形 OPQ と三角形 PRT の面積比を求めよう。

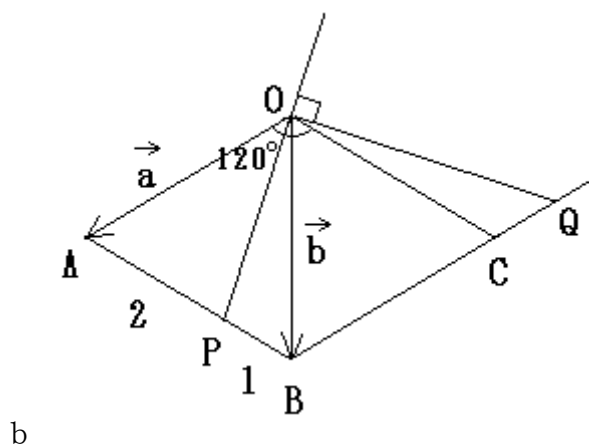
T は直線 OR 上の点であり、直線 PQ 上の点でもあるので、実数 r, s を用いて

$$\overrightarrow{OT} = r \overrightarrow{OR} = (1-s) \overrightarrow{OP} + s \overrightarrow{OQ}$$

と表すと、 $r = \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$, $s = \frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$ となることがわかる。よって、

$$\overrightarrow{OT} = \frac{\boxed{\text{ヌネ}}}{\boxed{\text{ノハ}}} \vec{a} + \frac{\boxed{\text{ヒ}}}{\boxed{\text{フ}}} \vec{b} \text{ である。}$$

上で求めた r, s の値から、三角形 OPQ の面積 S_1 と、三角形 PRT の面積 S_2 との比は、 $S_1 : S_2 = \boxed{\text{ヘホ}} : 2$ である。



(1) $AP : PB = 2 : 1$ より

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3} \vec{a} + \frac{2}{3} \vec{b}$$

となる。 $\overrightarrow{OQ}$ は実数 t を用いて $\overrightarrow{OQ} = (1-t) \overrightarrow{OB} + t \overrightarrow{OC}$ と表される。

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \text{ より}$$

$$\overrightarrow{OQ} = (1-t)\overrightarrow{OB} + t(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = -t\vec{a} + \vec{b}$$

である。 $\angle AOB = 60^\circ$, $OB = 1$ より

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \times |\vec{b}| \times \cos \angle AOB = \frac{1}{2}$$

また、 $\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{OQ}$ より $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = \mathbf{0}$ である。つまり

$$\left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right) \cdot (-t\vec{a} + \vec{b}) = 0$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right) \cdot (-t\vec{a} + \vec{b}) &= -\frac{1}{3}t|\vec{a}|^2 + \frac{2}{3}|\vec{b}|^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{2t}{3}\right)\vec{a} \cdot \vec{b} \\ &= -\frac{1}{3}t + \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3} - \frac{2t}{3}\right) \times \frac{1}{2} \\ &= -\frac{2}{3}t + \frac{5}{6} \end{aligned}$$

となることから、 $t = \frac{5}{4}$ である。

これらのことから、 $|\overrightarrow{OP}|$, $|\overrightarrow{OQ}|$ の値を求める。

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OP}|^2 &= \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right) \\ &= \frac{1}{9}|\vec{a}|^2 + \frac{4}{9}|\vec{b}|^2 + \frac{4}{9}\vec{a} \cdot \vec{b} \\ &= \frac{7}{9} \end{aligned}$$

$$|\overrightarrow{OQ}|^2 = \left(-\frac{5}{4}\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \left(-\frac{5}{4}\vec{a} + \vec{b}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{25}{16} |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - \frac{5}{2} \vec{a} \cdot \vec{b} \\
&= \frac{21}{16}
\end{aligned}$$

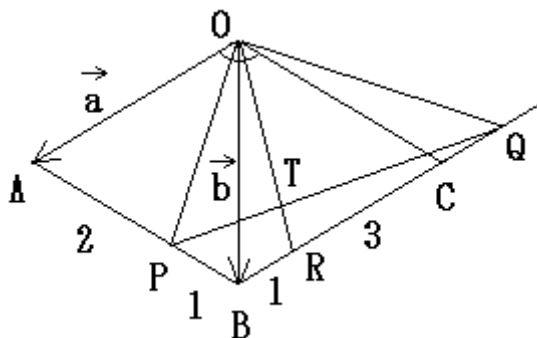
より

$$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{\frac{7}{9}} = \frac{\sqrt{7}}{3}, \quad |\overrightarrow{OQ}| = \sqrt{\frac{21}{16}} = \frac{\sqrt{21}}{4}$$

である。よって、三角形 OPQ の面積 S_1 は

$$S_1 = \frac{1}{2} \times |\overrightarrow{OP}| \times |\overrightarrow{OQ}| = \frac{7\sqrt{3}}{24}$$

(2)



辺 BC を $1:3$ に内分する点を R とし、直線 OR と直線 PQ との交点を T とする。

$$\overrightarrow{OT} = r \overrightarrow{OR} = (1-s) \overrightarrow{OP} + s \overrightarrow{OQ}$$

とする。 $BR:RC = 1:3$ より

$$\overrightarrow{OR} = \frac{3}{4} \overrightarrow{OB} + \frac{1}{4} \overrightarrow{OC} = \frac{3}{4} \vec{b} + \frac{1}{4} (\vec{b} - \vec{a}) = -\frac{1}{4} \vec{a} + \vec{b}$$

つまり、

$$\overrightarrow{OT} = -\frac{r}{4} \vec{a} + r \vec{b}$$

一方

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OT} &= (1-s) \overrightarrow{OP} + s \overrightarrow{OQ} \\ &= (1-s) \left(\frac{1}{3} \vec{a} + \frac{2}{3} \vec{b} \right) + s \left(-\frac{5}{4} \vec{a} + \vec{b} \right) \\ &= \left(\frac{1}{3} - \frac{19}{12} s \right) \vec{a} + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} s \right) \vec{b} \end{aligned}$$

である。 $\vec{a}, \vec{b}$ は一次独立であることから

$$-\frac{r}{4} = \frac{1}{3} - \frac{19}{12} s, \quad r = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} s$$

が成り立つ。この連立方程式を解くと、

$$r = \frac{7}{9}, \quad s = \frac{1}{3}$$

となるため、

$$\overrightarrow{OT} = \frac{-7}{36} \vec{a} + \frac{7}{9} \vec{b}$$

上で求めた r, s の値から、三角形 OPQ の面積 S_1 と、三角形 PRT の面積 S_2 との比を求める。

$$\overrightarrow{OT} = \frac{2}{3} \overrightarrow{OP} + \frac{1}{3} \overrightarrow{OQ}$$

より、

$$PT : TQ = 1 : 2 \Rightarrow OPQ : OPT = 3 : 1 = 21 : 7$$

一方

$$\overrightarrow{OT} = \frac{7}{9} \overrightarrow{OR}$$

より

$$OT : TR = 7 : 2 \Rightarrow OPT : PRT = 7 : 2$$

以上から面積比は、 $S_1 : S_2 = \mathbf{21 : 2}$ である。

第4問の正解

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ
1	3	2	ー	1	2	0
ク	ケ	コ	サ	シス	セ	ソ
5	4	7	3	21	4	7
タ	チツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌネ
3	24	7	9	1	3	ー7
ノハ	ヒ	フ	へホ			
36	7	9	21			