

2015 年度センター試験 数学 2 B

第 5 問

以下の問題を解答するにあたっては、必要に応じて 29 ページの正規分布表（ここでは省略）を用いてもよい。

また、小数の形で解答する場合、指定された桁数の一つ下の桁を四捨五入し、解答せよ。途中で割り切れた場合、指定された桁まで ⑩ にマークすること。

(1) 袋の中に白球が 4 個、赤球が 3 個入っている。この袋の中から同時に 3 個の球を取り出すとき、白球の個数を W とする。確率変数 W について

$$\begin{aligned} P(W=0) &= \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウ}}}, & P(W=1) &= \frac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{イウ}}}, \\ P(W=2) &= \frac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{イウ}}}, & P(W=3) &= \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{イウ}}}, \end{aligned}$$

であり、期待値（平均値）は $\frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ 、分散は $\frac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セソ}}}$ である。

(2) 確率変数 Z が標準正規分布に従うとき

$$P\left(-\boxed{\text{タ}} \leq Z \leq \boxed{\text{タ}}\right) = 0.99$$

が成り立つ。 $\boxed{\text{タ}}$ に当てはまる最も適切なものを、次の ① ～ ③ のうちから一つ選べ。

① 1.64

② 1.96

③ 2.33

④ 2.58

(3) 母標準偏差 σ の母集団から、大きさ n の無作為標本を抽出する。ただし、 n は十分大きいとする。この標本から得られる母平均 m の信頼度 (信頼係数) 95% の信頼区間を $A \leq m \leq B$ とし、この信頼区間の幅 L_1 を $L_1 = B - A$ で定める。

この標本から得られる信頼度 99% の信頼区間を $C \leq m \leq D$ とし、この信頼区間の幅 L_2 を $L_2 = D - C$ で定めると

$$\frac{L_2}{L_1} = \boxed{\text{チ}} \cdot \boxed{\text{ツ}}$$

が成り立つ。また、同じ母集団から、大きさ $4n$ の無作為標本を抽出して得られる母平均 m の信頼度 95% の信頼区間を $E \leq m \leq F$ とし、この信頼区間の幅 L_3 を $L_3 = F - E$ で定める。このとき

$$\frac{L_3}{L_1} = \boxed{\text{テ}} \cdot \boxed{\text{ト}}$$

が成り立つ。

(1) 球は赤、白合わせて 7 個あるため、袋から 3 個の球を取り出す方法は

$${}_7C_3 = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$$

通りある。

確率変数 W が 0 であるときは、取り出した 3 個の球に白球が入っていないことを表している。つまり取り出した 3 個の球はすべて赤球である。すべて赤球である取り出し方は 1 通りしかない。よって

$$P(W = 0) = \frac{1}{35}$$

また、確率変数 W が 1 であるときは、取り出した 3 個の球に白球が 1 個、赤球が 2 個であることを表す。このような取り出し方は

$${}_4C_1 \times {}_3C_2 = 4 \times 3 = 12$$

通りある。同様に、確率変数 W が 2 であるときは、取り出した 3 個の球に白球が 2 個、赤球が 1 個であることを表す。このような取り出し方は

$${}_4C_2 \times {}_3C_1 = 6 \times 3 = 18$$

通りある。以上より

$$P(W = 1) = \frac{12}{35}, \quad P(W = 2) = \frac{18}{35}$$

確率変数 W が 3 であるときは、取り出した 3 個の球がすべて白球であることを表す。このような取り出し方は ${}_4C_3 = 4$ 通りある。よって

$$P(W = 3) = \frac{4}{35}$$

以上から、期待値を求めると

$$0 \times \frac{1}{35} + 1 \times \frac{12}{35} + 2 \times \frac{18}{35} + 3 \times \frac{4}{35} = \frac{60}{35} = \frac{12}{7}$$

となり、分散は

$$\begin{aligned} \left(\frac{12}{7}\right)^2 \times \frac{1}{35} + \left(\frac{5}{7}\right)^2 \times \frac{12}{35} + \left(\frac{-2}{7}\right)^2 \times \frac{18}{35} + \left(\frac{-9}{7}\right)^2 \times \frac{4}{35} \\ = \frac{840}{7^2 \times 35} = \frac{24}{49} \end{aligned}$$

となる。

(2) 確率変数 Z が標準正規分布に従うとき、正規分布表より

$$P(0 \leq Z \leq 2.58) = 0.4951$$

が成り立つ。このことから

$$P(-2.58 \leq Z \leq 2.58) = 2 \times 0.4951 \cong 0.99$$

が成り立つ。

(3) 母標準偏差 σ の母集団から、大きさ n の無作為標本を抽出する。ただし、 n は十分大きいとする。これらの標本平均を $\bar{x}$ とする。このときの標準偏差は

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

と表される。正規分布表より、この標本から得られる母平均 m の信頼度 95% の信頼区間は

$$\bar{x} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

また、信頼度 99% の信頼区間は

$$\bar{x} - 2.58 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + 2.58 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

と表すことができる。このことから

$$\begin{aligned} L_1 &= \left(\bar{x} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) - \left(\bar{x} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = 2 \times 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ L_2 &= \left(\bar{x} + 2.58 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) - \left(\bar{x} - 2.58 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = 2 \times 2.58 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

となるため、

$$\frac{L_2}{L_1} = 2 \times 2.58 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} / 2 \times 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cong \mathbf{1.3}$$

が成り立つ。また、同じ母集団から、大きさ $4n$ の無作為標本を抽出して得られる母平均 m の信頼度 95% の信頼区間を $E \leq m \leq F$ とし、この信頼区間の幅 L_3 を $L_3 = F - E$ で定める。このとき標準偏差は

$$\frac{\sigma}{\sqrt{4n}} = \frac{\sigma}{2\sqrt{n}}$$

となるため、

$$L_3 = 2 \times 2.58 \frac{\sigma}{2\sqrt{n}}$$

よって

$$\frac{L_3}{L_1} = 2 \times 2.58 \frac{\sigma}{2\sqrt{n}} / 2 \times 2.58 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mathbf{0.5}$$

が成り立つ。

第5問の正解

ア	イウ	エオ	カキ	ク
1	35	12	18	4
ケコ	サ	シス	セソ	タ
12	7	24	49	3
チツ	テト			
1.3	0.5			