

2015 年度センター試験 工業数理基礎

第 2 問

飛行機が空を飛ぶ際、翼には揚力と呼ばれる上向きの力が働く。この揚力により翼は曲げモーメントが働く。ここでは 2 種類の翼について、翼の形状と曲げモーメントの関係を考える。

- ・2 種類とも、表面積は S [m²]、翼の横幅は L [m] で等しい。
- ・2 種類とも翼の単位面積の当たりの揚力は一定で、翼全体には同じ大きさの揚力が発生するものとする。

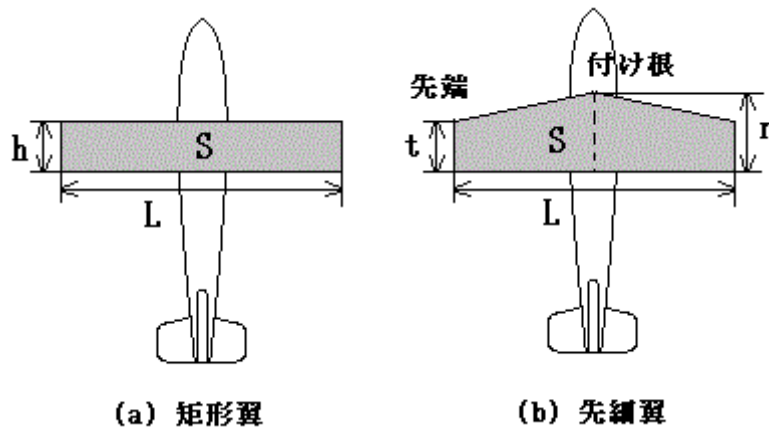


図 1

問 1 図 1 (a) は「矩形翼」と呼ばれ、翼の縦幅は一定である。翼の縦幅を h [m] とすると

$$S = h L \Rightarrow h = \frac{S}{L}$$

と表される。一方、図 1 (b) は「先細翼」と呼ばれ、翼の縦幅が翼の付け根から先端に行くにつれて一定の割合で小さくなる翼である。翼の付け根の縦幅を r [m]、翼の先端の縦幅を t [m] とすると、

$$S = 2 \times (r + t) \times \frac{L}{2} \times \frac{1}{2} \Rightarrow r + t = \frac{2S}{L} \quad (1)$$

と表される。先細翼における t と r の比は先端比と呼ばれ、ここでは λ と表す。すなわち

$$\lambda = \frac{t}{r} \quad (2)$$

と定義される。この式から $t = r\lambda$ となる。式 (1) にこの式を代入すると

$$r + r\lambda = r(\lambda + 1) = \frac{2S}{L} \Rightarrow r = \frac{2S}{L(\lambda + 1)}$$

と表される。また

$$t = r\lambda = \frac{2S}{L(\lambda + 1)} \times \lambda$$

と表される。

問 1 の正解

ア	イ	ウ
2	3	7

問 2 図 1 の矩形翼、先細翼の付け根に働くそれぞれの曲げモーメントを求めてみよう。

図 1(a) の矩形翼を正面から見た場合、揚力の分布は図 2(a)のように上向きの一様に分布する荷重（等分布荷重）として考えることができる。

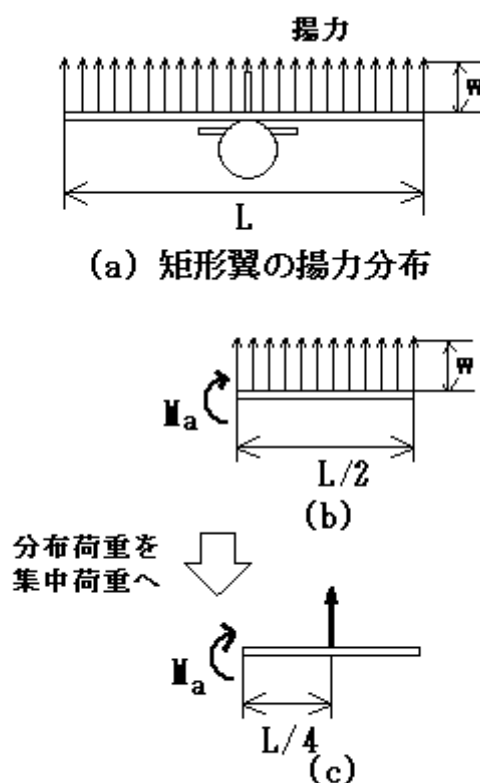


図 2

このとき図 2(a) の翼の付け根に働く曲げモーメントは、翼半分を図 2 (b) のような等分布荷重 $w[\text{N/m}]$ を受ける長さ $\frac{L}{2}$ の片持ばりとみなし、このはりの固定端に働くモーメント $M_a[\text{N} \cdot \text{m}]$ として求めることができる。

図 2 (b) の等分布荷重は、図 2 (c) のように、片持ちばりの中央に作用する集中荷重に置き換えることができ、図 2 (c) から M_a を求めると

$$M_a = w \times \frac{L}{2} \times \frac{L}{4} = \frac{wL^2}{8} \quad (3)$$

となる。

次に、図 1(b) の先細翼の翼の付け根に働く曲げモーメントについて考える。この時も矩形翼と同様に図 3(b) のような片持ちばりの固定端に働く曲げモーメント $M_b[\text{N} \cdot \text{m}]$ として求められる。

はりの付け根、先端での分布荷重の大きさをそれぞれ $w_t[\text{N/m}]$, $w_r[\text{N/m}]$ とする。

M_b を求めるため、図 3(c) のように分布荷重を、分布荷重の重心 G に作用する集中荷重 $F[\text{N}]$ に置き換える。 F は分布荷重の面積を計算することで求められ、

$$\begin{aligned} F &= (w_t + w_r) \times \frac{L}{2} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{L}{4} (w_t + w_r) \end{aligned}$$

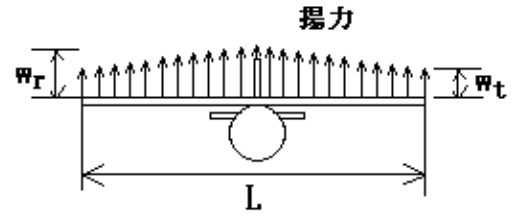
となる。

一方、はりの付け根から点 G までの距離を $e[\text{m}]$ とすると、 e は台形の重心を与える公式から

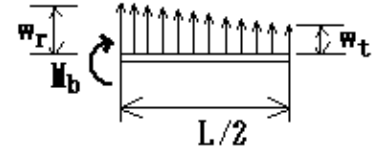
$$e = \frac{L(2w_t + w_r)}{6(w_t + w_r)}$$

と表される。これらより、 M_b は次のように表される。

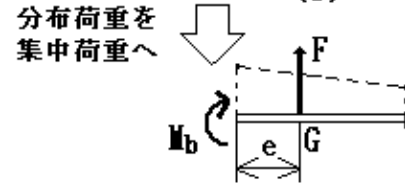
$$\begin{aligned} M_b = F \times e &= \frac{L}{4} (w_t + w_r) \times \frac{L(2w_t + w_r)}{6(w_t + w_r)} \\ &= \frac{L^2}{24} (2w_t + w_r) \end{aligned} \quad (4)$$



(a) 先細翼の揚力分布



(b)



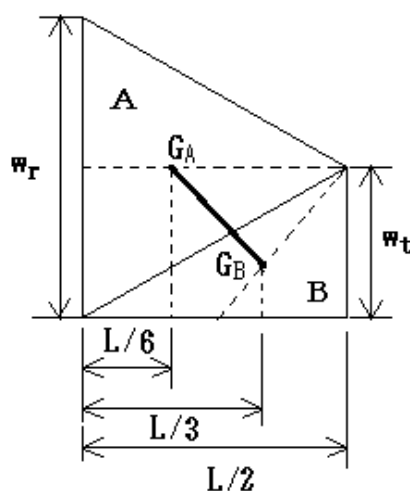
(c)

図 3

問 2 の正解

工	才	力
3	2	5

$$e = \frac{L(2w_t + w_r)}{6(w_t + w_r)} \text{ の証明}$$



台形の平行な 2 辺の長さがそれぞれ w_t , w_r 、高さが $L/2$ であるとする。この台形を図のように 2 個の三角形 A, B に分ける。これら三角形 A, B の面積比は

$$\frac{1}{2} \times w_r \times \frac{L}{2} : \frac{1}{2} \times w_t \times \frac{L}{2} = w_r : w_t$$

となる。

三角形 A の重心 G_A は、はりの付け根から $L/6$ の位置にあり、三角形 B の重心 G_B は、はりの付け根から $L/3$ の位置にある。

台形の重心 G は 2 つの三角形の重心 G_A, G_B を結ぶ線分の上にある、

$$GG_A : GG_B = \text{三角形 } B \text{ の面積} : \text{三角形 } A \text{ の面積} = w_t : w_r$$

となるため、 G の位置 e は次のようにして求められる。

$$e = \frac{1}{w_t + w_r} \left(\frac{L}{6} \times w_r + \frac{L}{3} \times w_t \right) = \frac{L(2w_t + w_r)}{6(w_t + w_r)}$$

問3 問2 で求めた曲げモーメント M_a, M_b の大小関係を調べてみる。分布荷重の合力が揚力の大きさに等しくなるので、矩形翼、先細翼の揚力の大きさはそ

れぞれ wL [N], $\frac{(w_t + w_r)L}{4}$ [N] となる。いま、これらが等しいとき、

$$wL = \frac{(w_t + w_r)L}{4} \Rightarrow w = \frac{w_t + w_r}{2}$$

という関係が成立する。これを式 (3) に代入すると、

$$M_a = \frac{L^2}{8} \times \left(\frac{w_t + w_r}{2} \right) = \frac{L^2}{16} (w_t + w_r) \quad (5)$$

式(4), (5) を用いて先細翼と矩形翼の付け根に発生する曲げモーメントの比を求めると

$$\frac{M_b}{M_a} = \frac{2}{3} \times \frac{2w_t + w_r}{w_t + w_r} \quad (6)$$

となる。ここで、 w_t と w_r の比は先細翼の縦幅 t と r の比、すなわち問 1 で定義された先細比に等しくなるので、 $\lambda = \frac{w_t}{w_r}$ が成り立つ。この関係を用い

て、式(6) を λ を用いて表すと、

$$\frac{M_b}{M_a} = \frac{2}{3} \times \frac{2w_t/w_r + 1}{w_t/w_r + 1} = \frac{2}{3} \times \frac{2\lambda + 1}{\lambda + 1} \quad (7)$$

となる。この式を変形すると

$$\frac{M_b}{M_a} = \frac{2}{3} \times \frac{2(\lambda + 1) - 1}{\lambda + 1} = \frac{2}{3} \times \left(2 - \frac{1}{\lambda + 1} \right)$$

となる。先細翼の場合、 $0 < \lambda < 1$ なので、式 (7) より

$$1 < \lambda + 1 < 2 \Rightarrow 1 < 2 - \frac{1}{\lambda + 1} < \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{2}{3} < \frac{M_b}{M_a} < 1$$

の関係が得られる。例えば $\lambda = \frac{2}{5}$ のとき

$$\lambda + 1 = \frac{7}{5} \Rightarrow \frac{M_b}{M_a} = \frac{2}{3} \times \left(2 - \frac{5}{7}\right) = \frac{6}{7}$$

となる。このように同じ横幅、翼面積を持つ矩形翼と先細翼とでは、揚力の大きさが同じであっても、翼の付け根に発生する曲げモーメントは先細翼の方が小さくなる。

問 3 の正解

キ	ク	ケ	コ	サ
0	3	8	6	7