

2015 年度センター試験 工業数理基礎

第 3 問

電気をを用いる加熱装置で湯をつくり、給湯する場合に消費される電力と費用について考える。

- ・給湯は常に一定量 1 kg/s で使用される。
- ・加熱は水を 50 C° だけ昇温されるものとする。
- ・水の比熱は $4.2 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{C}^\circ)$ で一定とする。
- ・消費される電力はすべて水を熱するものに使われるものとする。また、水と湯を移動させるのに必要な動力や、移動による熱損失は無視できるものとする。



図 1

問 1 図 1 のように加熱装置だけで過不足なく湯を供給するためには、この装置で常に 1 s あたり 1 kg の湯をつくることになる。水の比熱をもとに、 1 kg の水の温度を 50 C° 上げるために必要な熱量を求めると

$$4.2 \times 50 \times 1 = 210 \text{ kJ}$$

となる。加熱装置で消費される電力がすべて水を熱するのに使われるので、 $1 \text{ W} = 1 \text{ J/s}$ であることから、加熱装置の消費電力は 210 kW となる。

問 1 の正解

アイウ

210

問2 図2のように貯湯タンクを付加した給湯システムを用いると、電気料金の安い時間帯に加熱装置を運転して給湯と貯湯を行い、それ以外の時間帯に加熱装置の運転を停止して、タンクにためられた湯だけを用いて給湯することが可能となる。貯湯タンクでは熱損失を無視でき、湯の温度が一定に保たれるものとする。

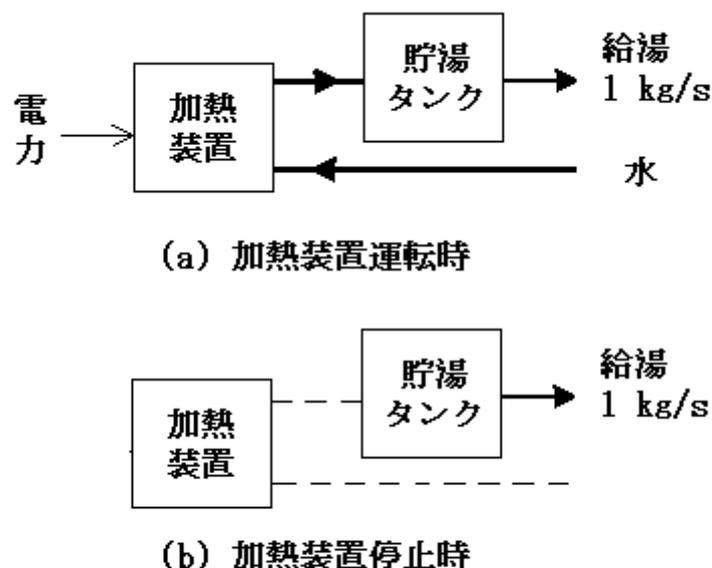
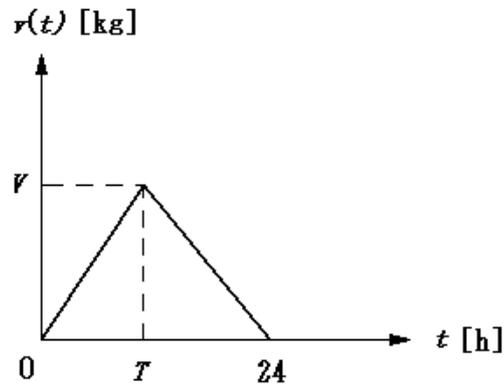


図 2

運転開始時間から翌日の同時刻までの1日 = 24 h について、運転開始時刻からの経過時間を t [h] ($0 \leq t \leq 24$) で表す。1日のうち加熱装置を連続 T [h] ($0 < T < 24$) の間だけ運転するものとし、加熱装置の消費電力を E [kW] で表す。

$0 \leq t \leq T$ では、加熱装置で湯を作り、そのうち 1 kg/s をその時間帯の給湯に利用し、残りを貯湯タンクにためておく。その後はタンクに貯まった分を使って給湯する。時間 t における貯湯タンクの湯量を $v(t)$ [kg] とし、 $t = 0$ と $t = 24$ で $v(t) = 0$ とすれば、1日の $v(t)$ の推移の概形は図3のようになり、 $v(t)$ は $t = T$ で最も大きくなる。この最大湯量を V [kg] と表すことにする。



給湯量は 1 kg/s であり、 $1 \text{ h} = 3600 \text{ s}$ なので、 1 h の間の給湯量は 3600 kg である。例えば加熱装置の1日の運転時間 T を 4 h とすれば、 $t = 4$ で運転を止めた時に、その後の 20 h の間に給湯すべき $3600 \times 20 \text{ kg}$ の湯が貯湯タンクに貯められなければならない。

このように、最大湯量 V は $T \leq t \leq 24$ の間の $24 - T$ 時間分の給湯量に等しいので、 T を用いて

$$V = 3600 \times (24 - T)$$

と表される。

一方、加熱装置は、1日の給湯量である $3600 \times 24 \text{ kg}$ の湯を $0 \leq t \leq T$ の $T \text{ [h]}$ の間につくらなければならないので、 1 s 当たりつくる湯の量は

$$\frac{3600 \times 24}{T \times 3600} = \frac{24}{T} \text{ [kg]}$$

になる。よって、加熱装置の運転時の消費電力 $E \text{ [kW]}$ は問1の結果より

$$E = 210 \times \frac{24}{T}$$

となり、 E は T の値によって決まる。

問2の正解

エオ	カ	キ
20	1	5

問3 図2の給湯システムにおいて、加熱装置の1日の運転時間 T と費用との関係を考えてみよう。以下では、 $6 \leq T \leq 12$ の範囲で考えることにし

$$\begin{aligned} \text{費用} = & [\text{加熱装置の設備費}] + [\text{貯湯タンクの設備費}] \\ & + [\text{加熱装置の運転時の電気代}] \end{aligned}$$

とする。

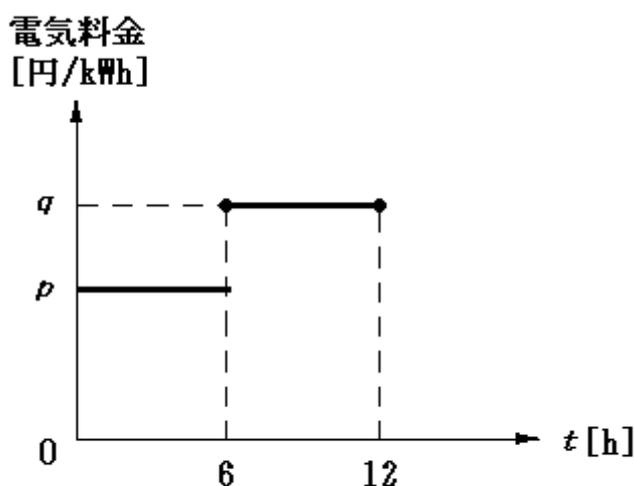


図 4

電気代は図4に示すように、電力量 1kWh 当たりの電気料金が時間帯によって異なり、 $0 \leq t < 6$ の間は p [円/kWh]、 $6 \leq t \leq 12$ では q [円/kWh] で、 $0 < p < q$ であるとする。

加熱装置の1日の電気代 x を求める。 $6 \leq T \leq 12$ であることから運転時間のうち始めの 6 時間は1時間あたり $6p$ 円、残りの $T - 6$ 時間は1時間あたり $(T - 6)q$ 円である。消費電力は E [kW] で湯をつくるため、 x は次式で表される。

$$x = \{6p + (T - 6)q\} \times E = \{6(p - q) + Tq\} E$$

1日当たりの設備費について、加熱装置は消費電力 E に比例しており、比例定数 C_h [円/kW] を使い $C_h E$ [円] と表すことができる。また貯湯タンクは最大湯量 V に比例しており、比例定数 C_v [円/kg] を使い $C_v V$ [円] と表すことができる。

以下では、具体的に

$$p = 12, \quad q = 16, \quad C_h = 20, \quad C_v = 0.1$$

として考えてみよう。給湯にかかる1日の電気代と設備費の和 y [円]を計算すると

$$\begin{aligned} x &= \{6 \times 12 + (T - 6) \times 16\} \times \left(210 \times \frac{24}{T}\right) \\ &= 80640 - \frac{120960}{T} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_h E &= 20 \times 210 \times \frac{24}{T} = \frac{100800}{T} \\ C_v V &= 0.1 \times 3600 \times (24 - T) = 8640 - 360 T \end{aligned}$$

整理すると。

$$y = x + C_h E + C_v V = 89280 - 360 \times \left(\frac{56}{T} + T\right) \quad (2)$$

となり、 y を T の関数として表すことができる。式 (2) から、 y は $T = 6$ のとき

$$y = 89280 - 360 \times \left(\frac{56}{6} + 6\right) = 83760$$

となり、 $T = 12$ のとき

$$y = 89280 - 360 \times \left(\frac{56}{12} + 12\right) = 83280$$

となるため、 $T = 6$ のときよりも $T = 12$ のときの方が小さくなることがわかる。

T を変化させると y がどのように変化するかを知るために、式 (2) から y の導関数 y' を求めると

$$y' = -360 \times \left(-\frac{56}{T^2} + 1\right) = 360 \times \left(\frac{56}{T^2} - 1\right) \quad (3)$$

となる。

y' と y の増減の関係は以下のとおりである。

- y' が正になる T の範囲では、 T が増えるとともに y は増加する。
- y' が負になる T の範囲では、 T が増えるとともに y は減少する。

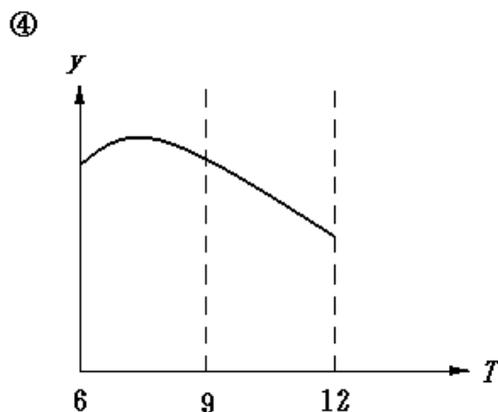
このことを利用して、 $6 \leq T \leq 12$ における y の変化をみる。

$$y' = 0 \Rightarrow \frac{56}{T^2} - 1 = 0 \Rightarrow T = \pm\sqrt{56}$$

$\sqrt{56} \cong 7.5$ であることから、 $6 \leq T \leq 12$ における y の変化は以下の通りになる。

T	6	$\sqrt{56}$	12
y'	+	0	-
y	増加		減少

以上から、 T と y の関係を表すグラフの概形は 7.5 付近で最大である ④ であることがわかる。



上記の検討により、費用 y を最も小さくできるような T の値は $T = 12$ であることがわかる。この T の値を式 (1) に代入することによって、加熱装置

の運転時の消費電力 E の設定値は

$$E = 210 \times \frac{24}{12} = 420 \text{ kW}$$

とすればよいことがわかる。

問3の正解

ク	ケ	コ
2	4	1