2015年度センター試験　旧数学１

第１問

［１］ $k,\ a,\ b,\ c$ を実数とする。 x の４次式

$$x^4+5\,x^3+6\,x^2+k\,x-8$$

は

$$(x^2+a\,x+4)\,(x^2+b\,x-c)$$

と因数分解されているとする。

(1) $c=$ $\boxed{\text{ア}}$ である。

(2) $a<b$ ならば、$a=$ $\boxed{\text{イ}}$, $b=$ $\boxed{\text{ウ}}$ であり、このとき $k=$ $\boxed{\text{エオ}}$ となる。
$a\geq b$ ならば、$a=$ $\boxed{\text{カ}}$, $b=$ $\boxed{\text{キ}}$ であり、このとき $k=$ $\boxed{\text{クケ}}$ となる。

---

(1)

$$\begin{aligned}&(x^2+a\,x+4)\,(x^2+b\,x-c)\\&\qquad=x^4+(a+b)\,x^3+(ab+2)\,x^2+(4b-ac)\,x-4c\end{aligned}$$

となるため、定数項を比較すると、$-4c=-8\Rightarrow c=\mathbf{2}$

(2) 上の式の他の係数を比較すると

$$a+b=5,\qquad ab+2=6\Rightarrow ab=4$$

となるため、$a,\ b$ は t の２次方程式

$$t^2-5\,t+4=0$$

の解である。この２次方程式の解は $t=1,\ 4$ である。

　また

$$4b - ac = k \Rightarrow k = -2a + 4b$$

となる。

　$a < b$ ならば、$a = \mathbf{1}$ ，$b = \mathbf{4}$ であり、このとき

$$k = -2 \times 1 + 4 \times 4 = \mathbf{14}$$

となる。
一方 $a \geq b$ ならば、$a = \mathbf{4}$ ，$b = \mathbf{1}$ であり、このとき

$$k = -2 \times 4 + 4 \times 1 = \mathbf{-4}$$

となる。

［１］の正解

ア	イ	ウ	エオ	カ	キ	クケ
2	**1**	**4**	**14**	**4**	**1**	**－4**

［2］a を定数とし、x の二つの不等式

$$\begin{cases} 7x+2 < 3x+a \cdots\cdots\cdots ① \\ x+11 < \sqrt{2}x+5 \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

を考える。

下の $\boxed{\text{サ}}$ 、$\boxed{\text{タ}}$ 、$\boxed{\text{チ}}$ には、次の ⓪ ～ ④ のうちから当てはまるものを一つずつ選べ。ただし、同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪ ＞　　① ＜　　② ≧　　③ ≦　　④ ＝

(1) $a=10$ のとき、不等式 ① を満たす正の整数 x は $\boxed{\text{コ}}$ 個である。

(2) 不等式 ② の解は

$$x \ \boxed{\text{サ}} \ \boxed{\text{シ}}\sqrt{2}+\boxed{\text{ス}}$$

である。

(3) ① と ② の連立不等式を満たす整数 x がちょうど 10 個存在するような の値の範囲は

$$\boxed{\text{セソ}} \ \boxed{\text{タ}} \ a \boxed{\text{チ}} \ \boxed{\text{ツテト}}$$

である。

---

(1) $a=10$ のとき、不等式 ① を解くと

$$7x+2<3x+10 \ \Rightarrow \ 4x<8 \ \Rightarrow \ x<2$$

となる。よって不等式 ① を満たす正の整数 x は $x=1$ の 1 個である。

(2) 不等式 ② を解くと

$$x+11<\sqrt{2}\,x+5 \;\Rightarrow\; \left(\sqrt{2}-1\right)x>6$$

$$\Rightarrow\; x>\frac{6}{\sqrt{2}-1}=\frac{6\,(\sqrt{2}+1\,)}{2-1}=\mathbf{6}\,\sqrt{2}+\mathbf{6}$$

(3)　不等式 ① を解くと、

$$7\,x+2<3\,x+a \;\Rightarrow\; 4\,x<a-2 \;\Rightarrow\; x<\frac{a-2}{4}$$

となる。つまり、① と ② の連立不等式を満たす x の範囲は

$$6\sqrt{2}+6<x<\frac{a-2}{4}$$

となる。$6\sqrt{2}\sim 8.46$ より、この範囲を満たす整数は 15 以上の整数である。

いま、① と ② の連立不等式を満たす整数 x がちょうど 10 個存在するとき、10 個の整数は 15 以上 24 以下の整数となる。上の x の範囲に含まれる整数がちょうど 15 以上 24 以下であるための必要十分条件は

$$24<\frac{a-2}{4}\le 25 \;\Rightarrow\; 96<a-2\;\le 100 \;\Rightarrow\; \mathbf{98}<a\;\le \mathbf{102}$$

［２］の正解

コ	サ	シ	ス
1	**0**	**6**	**6**
セソ	タ	チ	ツテト
98	**1**	**3**	**102**