

2015 年度センター試験 旧数学 1

第 3 問

三角形 ABC において、 $AB = 4$, $BC = 7$, $CA = \sqrt{23}$ とし、点 A から辺 BC へ下ろした垂線と BC の交点を D とする。このとき

$$\cos \angle ABC = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}, \quad \sin \angle ABC = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}, \quad AD = \sqrt{\boxed{\text{オ}}}$$

である。

点 C から直線 AB へ下ろした垂線と直線 AB の交点を AE とすると、点 E は辺 AB の A の側の延長上にあり

$$BE = \frac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{ク}}}, \quad \cos \angle DAE = \frac{\boxed{\text{ケ}}\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}}$$

である。

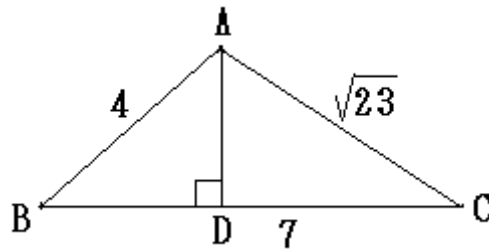
さらに直線 AD と直線 CE の交点を F とする。このとき

$$AF = \frac{\boxed{\text{シ}}\sqrt{\boxed{\text{ス}}}}{\boxed{\text{セ}}}, \quad BF = \frac{\boxed{\text{ソ}}\sqrt{\boxed{\text{タチツ}}}}{\boxed{\text{テ}}}$$

となり、三角形 ABF の外接円の半径は $\frac{\boxed{\text{ト}}\sqrt{\boxed{\text{ナニヌ}}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ である。また、

$$\frac{\text{三角形 } ABD \text{ の面積}}{\text{三角形 } AEF \text{ の面積}} = \frac{\boxed{\text{ノハヒ}}}{\boxed{\text{フヘ}}}$$

である。



(1) 余弦定理より

$$\cos \angle ABC = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \times AB \times BC} = \frac{4^2 + 7^2 - (\sqrt{23})^2}{2 \times 4 \times 7} = \frac{3}{4}$$

よって

$$\sin \angle ABC = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

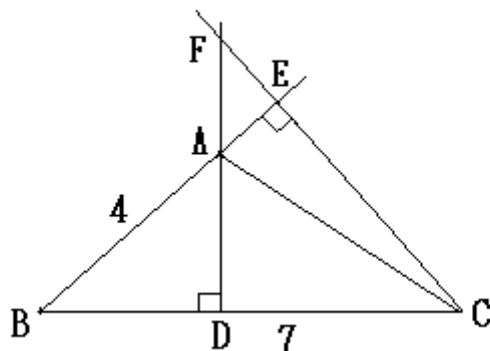
このことから三角形 ABC の面積を求めると、

$$\frac{1}{2} \times AB \times BC \times \sin \angle ABC = \frac{1}{2} \times 4 \times 7 \times \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{7}{2} \sqrt{7}$$

となる。一方、三角形 ABC の面積は $\frac{1}{2} \times BC \times AD$ によっても求められるため、

$$\frac{1}{2} \times 7 \times AD = \frac{7}{2} \sqrt{7} \Rightarrow AD = \sqrt{7}$$

である。



点 C から直線 AB へ下ろした垂線と直線 AB の交点を AE とする。

$$\cos \angle CBE = \cos \angle ABC = \frac{3}{4}$$

となることから

$$BE = CB \times \cos \angle CBE = 7 \times \frac{3}{4} = \frac{21}{4}$$

また

$$\cos \angle BAD = \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

である。点 E は辺 AB の A の側の延長上にあるため、 $\angle BAD + \angle DAE = 180^\circ$ である。よって、

$$\cos \angle DAE = -\cos \angle BAD = -\frac{\sqrt{7}}{4}$$

直線 AD と直線 CE の交点を F とする。このとき三角形 ABD と三角形 AFE について、 $\angle BAD = \angle FAE$, $\angle ADB = \angle AEF$ であることから三角形

ABD と三角形 AFE は相似である。よって $AB : AD = AF : AE$ となるため、

$$AF = AB \times AE \times \frac{1}{AD} = 4 \times \frac{5}{4} \times \frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{5\sqrt{7}}{7}$$

となる。

また

$$DF = DA + AF = \sqrt{7} + \frac{5\sqrt{7}}{7} = \frac{12}{7}\sqrt{7}$$

$$BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{16 - 7} = 3$$

となることから、

$$BF = \sqrt{DF^2 + BD^2} = \sqrt{9 + \frac{144}{7}} = \sqrt{\frac{207}{7}} = \frac{3\sqrt{161}}{7}$$

三角形 ABF について、 $\angle BAF = \angle DAE$ より

$$\sin \angle BAF = \sqrt{1 - (\cos \angle DAE)^2} = \sqrt{1 - \frac{7}{16}} = \frac{3}{4}$$

よって、正弦定理より ABF の外接円の半径は

$$\frac{1}{2} \times \frac{BF}{\sin \angle BAF} = \frac{3\sqrt{161}}{7} \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{2\sqrt{161}}{7}$$

である。

三角形 ABD と三角形 AFE は相似であることから

$$\frac{\text{三角形 } ABD \text{ の面積}}{\text{三角形 } AEF \text{ の面積}} = \frac{AB^2}{AF^2} = 4^2 \times \left(\frac{7}{5\sqrt{7}}\right)^2 = \frac{112}{25}$$

である。

第 3 問の正解

ア	イ	ウ	エ	オ	カキ	ク
3	4	7	4	7	21	4
ケ, コ	サ	シ、ス	セ	ソ	タチツ	テ
$-\sqrt{7}$	4	$5\sqrt{7}$	7	3	161	7
ト	ナニヌ	ネ	ノハヒ	フヘ		
2	161	7	112	25		