2015 年度センター試験　旧数学 1A

第 3 問

三角形 ABC において、$AB = \sqrt{7},\ BC = 2,\ CA = 3$ とし、このとき $\cos\angle C = \dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ であるから、$\sin\angle C = \dfrac{\sqrt{\boxed{ウ}}}{\boxed{イ}}$ で、三角形 ABC の外接円 O の半径は $\dfrac{\sqrt{\boxed{オカ}}}{\boxed{キ}}$ である。また、円 O の、C を含まない弧 AB と、弦 AB で囲まれた図形の面積は

$$\frac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}\pi - \frac{\boxed{コ}\sqrt{\boxed{サ}}}{\boxed{シス}}$$

である。ただし π は円周率である。

辺 BC を C の側に延長して $CD = 5$ となるちょうに点 D をとると

$$AD = \boxed{セ}$$

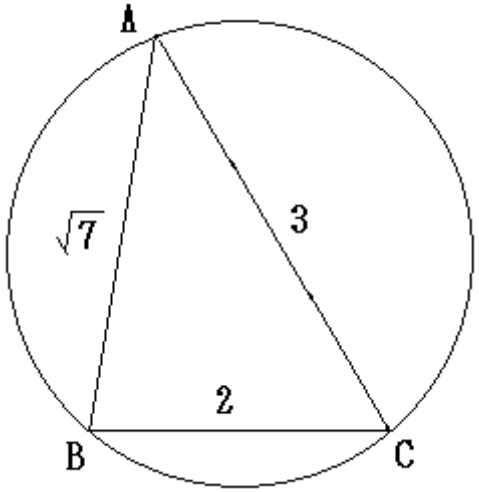
である。

辺 AB の A の側の延長と三角形 ACD の外接円との交点で A と異なるものを E とする。このとき、$AB \cdot EB = \boxed{ソタ}$ であるから、$AE = \sqrt{\boxed{チ}}$ であり

$$\frac{\text{三角形 } ABC \text{ の面積}}{\text{三角形 } EBD \text{ の面積}} = \frac{\boxed{ツ}}{\boxed{テ}}$$

である。

また、三角形 EBD の重心を G とすると、$DG = \dfrac{\boxed{トナ}}{\boxed{ニ}}$ である。



余弦定理より

$$\cos\angle C = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2 \times AC \times BC} = \frac{3^2 + 2^2 - \left(\sqrt{7}\right)^2}{2 \times 3 \times 2} = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

よって

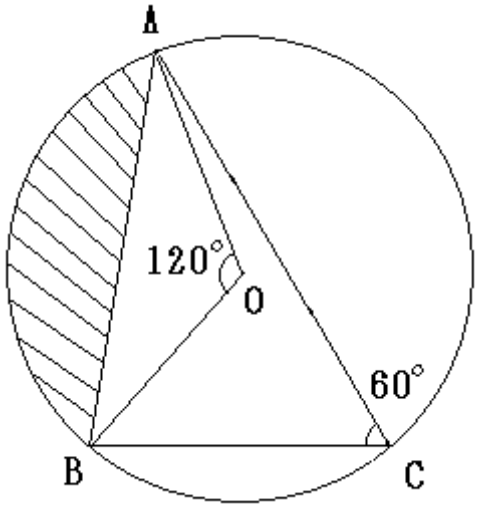
$$\sin\angle C = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \mathbf{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

である。

正弦定理より ABC の外接円 O の半径は

$$\frac{1}{2}\times\frac{AB}{\sin\angle C}=\frac{1}{2}\times\sqrt{7}\times\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{21}}{3}}$$

である。



ここで、$\cos\angle C$ の値から $C=60°$ であることがわかる。よって中心角 $\angle AOB$ の値は $120°$ である。このことから

$$\text{扇形 } OAB \text{ の面積}=\pi\times\left(\frac{\sqrt{21}}{3}\right)^2\times\frac{120°}{360°}=\frac{7}{9}\,\pi$$

$$\text{三角形 } OAB \text{ の面積}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{21}}{3}\right)^2\times\sin\angle AOB$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{7}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{7\sqrt{3}}{12}$$

したがって、求める部分の面積は

$$\boldsymbol{\frac{7}{9}\,\pi-\frac{7\sqrt{3}}{12}}$$

である。

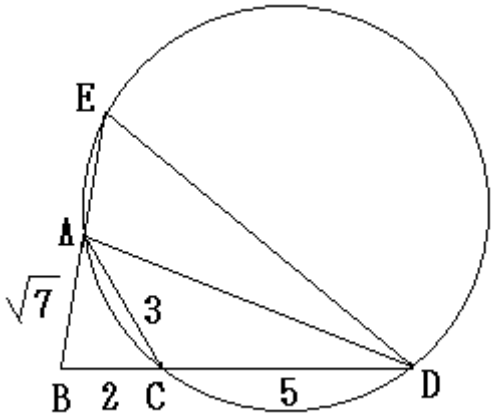
辺 BC を C の側に延長して $CD = 5$ となるちょうに点 D をとる。このとき $\angle ACD = 180° - \angle C = 120°$ であることから、余弦定理を使い

$$\begin{aligned} AD^2 &= AC^2 + CD^2 - 2 \times AC \times CD \times \cos \angle ACD \\ &= 9 + 25 - 2 \times 3 \times 5 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= 49 \end{aligned}$$

よって

$$AD = \mathbf{7}$$

である。



辺 AB の A の側の延長と三角形 ACD の外接円との交点で A と異なるものを E とする。三角形 ABC と三角形 DBE について、四角形 $ACDE$ が円に内接していることから

$$\angle BAC = \angle BDE,\ \angle BCA = \angle BED$$

が成り立つ。よって、二つの三角形が相似であることがわかる。したがって、

$$AB : CB = BD : EB \Rightarrow AB \cdot EB = CB \cdot BD = 2 \times 7 = \mathbf{14}$$

このことから

$$EB = \frac{14}{AB} = \frac{14}{\sqrt{7}} = 2\sqrt{7} \Rightarrow AE = EB - AB = \sqrt{\mathbf{7}}$$

である。

$BC : BD = 2 : 7,\ BA : BE = 1 : 2$ であることから、

$$\frac{\text{三角形 } ABC \text{ の面積}}{\text{三角形 } ABD \text{ の面積}} = \frac{2}{7}, \qquad \frac{\text{三角形 } ABD \text{ の面積}}{\text{三角形 } EBD \text{ の面積}} = \frac{1}{2}$$

となるため、

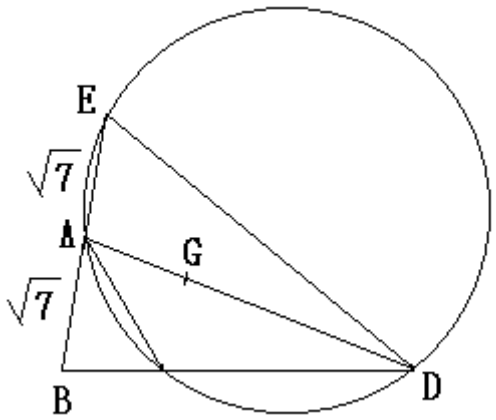
$$\frac{\text{三角形 } ABC \text{ の面積}}{\text{三角形 } EBD \text{ の面積}} = \frac{2}{7} \times \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{1}{7}}$$

である。

また、三角形 EBD の重心を G とする。$BA = AE$ より重心 G は辺 AD 上にあり、$AG : GD = 1 : 2$ に内分する。よって

$$DG = \frac{2}{3} \times AD = \mathbf{\frac{14}{3}}$$

である。



第３問の正解

ア	イ	ウ	エ	オカ	キ	ク
1	**2**	**3**	**2**	**21**	**7**	**7**
ケ	コ	サ	シス	セ	ソタ	チ
9	**7**	**3**	**12**	**7**	**14**	**7**
ツ	テ	トナ	ニ			
1	**7**	**14**	**3**			