

## 2015年度センター試験 旧数学2B

### 第2問

(1) 関数  $f(x) = \frac{1}{2}x^2$  の  $x = a$  における微分係数  $f'(x)$  を求めよう。 $h$  が 0 でないとき、 $x$  が  $a$  から  $a+h$  まで変化するときの  $f(x)$  の平均変化率は  $\boxed{\text{ア}} + \frac{h}{\boxed{\text{イ}}}$  である。したがって、求める微分係数は

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow \boxed{\text{ウ}}} \left( \boxed{\text{ア}} + \frac{h}{\boxed{\text{イ}}} \right) = \boxed{\text{エ}}$$

である。

(2) 放物線  $f(x) = \frac{1}{2}x^2$  を  $C$  とし、 $C$  上に点  $P \left( a, \frac{1}{2}a^2 \right)$  をとる。ただし、 $a > 0$  とする。点  $P$  における  $C$  の接線  $l$  の方程式は

$$y = \boxed{\text{オ}} x - \frac{1}{\boxed{\text{カ}}} a^2$$

である。直線  $l$  と  $x$  軸との交点  $Q$  の座標は  $\left( \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}, 0 \right)$  である。点  $Q$  を通り  $l$  に垂直な直線を  $m$  とすると、 $m$  の方程式は

$$y = \frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}} x + \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$$

である。

直線  $m$  と  $y$  軸の交点を  $A$  とする。三角形  $APQ$  の面積を  $S$  とおくと

$$S = \frac{a(a^2 + \boxed{\text{セ}})}{\boxed{\text{ソ}}}$$

となる。また、 $y$  軸と線分  $AP$  および曲線  $C$  によって囲まれた図形の面積を  $T$  とおくと

$$T = \frac{a(a^2 + \boxed{\text{タ}})}{\boxed{\text{チツ}}}$$

となる。

$a > 0$  の範囲における  $S - T$  の値について調べよう。

$$S - T = \frac{a(a^2 - \boxed{\text{テ}})}{\boxed{\text{トナ}}}$$

である。 $a > 0$  であるから、 $S - T > 0$  となるような  $a$  のとり得る値の範囲は  $a > \sqrt{\boxed{\text{ニ}}}$  である。また、 $a > 0$  のときの  $S - T$  の増減を調べると、 $S - T$

は  $a = \boxed{\text{ヌ}}$  で最小値  $\frac{\boxed{\text{ネノ}}}{\boxed{\text{ハヒ}}}$  をとることがわかる。

---

(1)  $h$  が  $0$  でないとき、 $x$  が  $a$  から  $a + h$  まで変化するときの  $f(x) = \frac{1}{2}x^2$  の平均変化率は

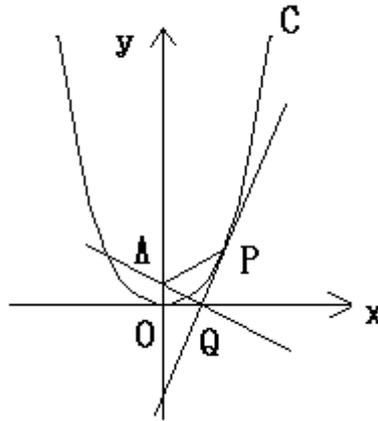
$$\frac{1}{h} \left\{ \frac{1}{2}(a+h)^2 - \frac{1}{2}a^2 \right\} = \frac{1}{2h} (2ah + h^2) = a + \frac{h}{2}$$

したがって、求める微分係数は

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \left( a + \frac{h}{2} \right) = a$$

である。

(2)



$C$  上に点  $P \left( a, \frac{1}{2}a^2 \right)$  をとる。ただし、 $a > 0$  とする。 $f'(x) = x$  より点  $P$  における  $C$  の接線  $l$  の方程式は

$$y - \frac{1}{2}a^2 = a(x - a) \Rightarrow y = ax - \frac{1}{2}a^2$$

である。直線  $l$  と  $x$  軸との交点  $Q$  は  $y$  座標が  $0$  であることから、

$$ax - \frac{1}{2}a^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{a}{2}$$

よって、点  $Q$  の座標は  $\left( \frac{a}{2}, 0 \right)$  である。点  $Q$  を通り  $l$  に垂直な直線を  $m$

とすると、 $m$  の傾きが  $-\frac{1}{a}$  であるため、 $m$  の方程式は

$$y = -\frac{1}{a}\left(x - \frac{a}{2}\right) \Rightarrow y = \frac{-1}{a}x + \frac{1}{2}$$

である。

直線  $m$  と  $y$  軸の交点を  $A$  とする。 $A$  の座標は  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$  である。三角形  $APQ$  は  $\angle AQP = 90^\circ$  となる直角三角形である。

$$PQ = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a^2}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}\sqrt{a^2 + 1}$$

$$AQ = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 1}$$

であることから、三角形  $APQ$  の面積を  $S$  とおくと

$$S = \frac{1}{2} \times AQ \times PQ = \frac{a}{8}(a^2 + 1)$$

となる。また、 $y$  軸と線分  $AP$  および曲線  $C$  によって囲まれた図形について、線分  $AP$  の方程式は

$$y - \frac{1}{2} = \frac{\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}}{a}x \Rightarrow y = \frac{a^2 - 1}{2a}x + \frac{1}{2}$$

である。よって、この面積を  $T$  とおくと

$$T = \int_0^a \left\{ \frac{a^2 - 1}{2a}x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^2 \right\} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a^2 - 1}{2a} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^a + \frac{1}{2} [x]_0^a - \frac{1}{2} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^a \\
&= \frac{a(a^2 - 1)}{4} + \frac{a}{2} - \frac{a^3}{6} \\
&= \frac{a(a^2 + 3)}{12}
\end{aligned}$$

となる。

$a > 0$  の範囲における  $S - T$  の値について調べよう。

$$S - T = \frac{a}{8}(a^2 + 1) - \frac{a(a^2 + 3)}{12} = \frac{a(a^2 - 3)}{24}$$

である。 $a > 0$  であるから、

$$S - T > 0 \Rightarrow a^2 - 3 > 0 \Rightarrow a > \sqrt{3}$$

である。また、

$$g(a) = \frac{a(a^2 - 3)}{24}$$

とすると、

$$g'(a) = \frac{1}{24}(3a^2 - 3) = \frac{1}{8}(a^2 - 1)$$

となるため、 $a > 0$  のときの  $S - T$  の増減を調べると以下の通りになる。

$a$	0		1	
$g'(a)$	-		0	+
$g(a)$	減少		最小	増加

よって、 $S - T$  は  $a = 1$  で最小値  $\frac{-2}{24} = \frac{-1}{12}$  をとることがわかる。

第2問の正解

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ
<b><math>a</math></b>	<b>2</b>	<b>0</b>	<b><math>a</math></b>	<b><math>a</math></b>	<b>2</b>	<b><math>a</math></b>
ク	ケコ	サ	シ	ス	セ	ソ
<b>2</b>	<b>-1</b>	<b><math>a</math></b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>8</b>	<b>1</b>
タ	チツ	テ	トナ	ニ	ヌネ	ノハ
<b>3</b>	<b>12</b>	<b>3</b>	<b>24</b>	<b>1</b>	<b>-1</b>	<b>12</b>