2015年度センター試験　数学旧２Ｂ

第３問

自然数 n に対し、2^n の一の位の数を a_n とする。また、数列 $\{b_n\}$ は

$$b_1 = 1, \qquad b_{n+1} = \frac{a_n b_n}{4} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \quad \cdots ①$$

を満たすとする。

(1)　$a_1 = 2,\ a_2 = \boxed{ア}$, $a_3 = \boxed{イ}$, $a_4 = \boxed{ウ}$, $a_5 = \boxed{エ}$ 　である。

このことから、すべての自然数 n に対して、$a_{\boxed{オ}} = a_n$ となることがわかる。

$\boxed{オ}$ に当てはまるものを、次の ⓪ ～ ④ のうちから一つ選べ。

⓪ $5n$　　① $4n+1$　　② $n+3$　　③ $n+4$　　④ $n+5$

(2) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよう。① を繰り返し用いることにより

$$b_{n+4} = \frac{a_{n+3}a_{n+2}a_{n+1}a_n}{2^{\boxed{カ}}}\, b_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

が成り立つことがわかる。ここで、$a_{n+3}a_{n+2}a_{n+1}a_n = 3 \cdot 2^{\boxed{キ}}$ であることから、$b_{n+4} = \dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}} b_n$ が成り立つ。このことから、自然数 k に対して

$$b_{4k-3} = \left(\frac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}\right)^{k-1}, \qquad b_{4k-2} = \frac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}\left(\frac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}\right)^{k-1}$$

$$b_{4k-1} = \frac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}\left(\frac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}\right)^{k-1}, \qquad b_{4k} = \left(\frac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}\right)^{k-1}$$

である。

(3) $S_n=\sum_{j=1}^{n} b_j$ とおく。自然数 m に対して

$$S_{4m}=\boxed{タ}\left(\frac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}\right)^m-\boxed{チ}$$

である。

(4) 積 $b_1 b_2 \cdots b_n$ を T_n とおく。自然数 k に対して

$$b_{4k-3}b_{4k-2}b_{4k-1}b_{4k}=\frac{1}{\boxed{ツ}}\left(\frac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}\right)^{\boxed{テ}(k-1)}$$

であることから、自然数 m に対して

$$T_{4m}=\frac{1}{\boxed{ツ}^{\,m}}\left(\frac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}\right)^{\boxed{ト}m^2-\boxed{ナ}\,m}$$

である。また、T_{10} を計算すると $T_{10}=\dfrac{3^{\boxed{ニ}}}{2^{\boxed{ヌネ}}}$ である。

---

(1)　$2^1=2,\ 2^2=4,\ 2^3=8,\ 2^4=16,\ 2^5=32$ であることから、

$$a_1=2,\qquad a_2=\mathbf{4},\qquad a_3=\mathbf{8},\qquad a_4=\mathbf{6},\qquad a_5=\mathbf{2}$$

である。

a_n について $a_5=a_1$ が成り立つ。また、$a_{n+4}=a_n$ のとき、a_{n+5} は $2^{n+5}=2\times 2^{n+4}$ の一の位であるため、$2\,a_{n+4}=2\,a_n$ の一の位の数字と等しい。よって $a_{n+5}=a_{n+1}$ となる。帰納法よりすべての自然数 n に対して

$\boldsymbol{a_{n+4}} = a_n$ であることがわかる。

(2) ① を繰り返し用いることにより

$$
\begin{aligned}
b_{n+4} &= \frac{a_{n+3}\, b_{n+3}}{4} \\
&= \frac{a_{n+3}}{4} \times \frac{a_{n+2}}{4} \times \frac{a_{n+1}}{4} \times \frac{a_n}{4} \times b_n \\
&= \frac{a_{n+3}a_{n+2}a_{n+1}a_n}{2^{\mathbf{8}}}\, b_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)
\end{aligned}
$$

が成り立つことがわかる。ここで、a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3} はそれぞれ $2, 4, 6, 8$ のいずれかと 1 つずつ等しいため、

$$a_{n+3}a_{n+2}a_{n+1}a_n = 2 \times 4 \times 8 \times 6 = 3 \cdot 2^{\mathbf{7}}$$

である。したがって

$$b_{n+4} = \frac{3 \cdot 2^7}{2^8}\, b_n = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\, b_n$$

が成り立つ。一般に自然数 m, n に対して

$$b_{n+4m} = \left(\frac{3}{2}\right)^m b_n$$

となる。このことから、自然数 k に対して

$$
\begin{aligned}
b_{4k-3} &= b_{1+4(k-1)} = \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} b_1 = \left(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\right)^{k-1} \\
b_{4k-2} &= b_{2+4(k-1)} = \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} b_2 = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} \\
b_{4k-1} &= b_{3+4(k-1)} = \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} b_3 = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} \\
b_{4k} &= b_{4+4(k-1)} = \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} b_4 = \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}
\end{aligned}
$$

である。

(3) $S_n = \sum_{j=1}^{n} b_j$ とおく。(2) より

$$\begin{aligned} & b_{4k-3} + b_{4k-2} + b_{4k-1} + b_{4k} \\ &\qquad = \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} + \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} \\ &\qquad = 3\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} \end{aligned}$$

となるため、自然数 m に対して

$$\begin{aligned} S_{4m} &= \sum_{k=1}^{m} (b_{4k-3} + b_{4k-2} + b_{4k-1} + b_{4k}) \\ &= \sum_{k=1}^{m} 3\ \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} \\ &= 3 \times \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{m} - 1}{\left(\frac{3}{2}\right) - 1} \\ &= \mathbf{6}\left(\frac{3}{2}\right)^{m} - \mathbf{6} \end{aligned}$$

(4) 積 $b_1 b_2 \cdots b_n$ を T_n とおく。自然数 k に対して

$$\begin{aligned} b_{4k-3} b_{4k-2} b_{4k-1} b_{4k} &= \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} \times \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} \times \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{\mathbf{4}}\left(\frac{3}{2}\right)^{\mathbf{4}k-\mathbf{4}} \end{aligned}$$

であることから、自然数 m に対して

$$
\begin{aligned}
T_{4m} &= \prod_{k=1}^{m} (b_{4k-3} b_{4k-2} b_{4k-1} b_{4k}) \\
&= \prod_{k=1}^{m} \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2}\right)^{4k-4} \\
&= \frac{1}{4^m} \left(\frac{3}{2}\right)^{\sum_{k=1}^{m}(4k-4)}
\end{aligned}
$$

となる。累乗の部分を計算すると

$$
\sum_{k=1}^{m} (4k-4) = 4 \times \frac{1}{2} k(k+1) - 4k = 2\,k^2 - 2k
$$

となるため、

$$
T_{4m} = \frac{1}{4^m} \left(\frac{3}{2}\right)^{\mathbf{2}k^{\mathbf{2}}-\mathbf{2}k}
$$

である。また、T_{10} を計算すると

$$
\begin{aligned}
T_{10} &= T_8 \cdot b_9 \cdot b_{10} \\
&= \frac{1}{4^2} \left(\frac{3}{2}\right)^{2\times 2^2 - 2\times 2} \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2^4} \left(\frac{3}{2}\right)^4 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\
&= \frac{3^{\mathbf{8}}}{2^{\mathbf{13}}}
\end{aligned}
$$

第３問の正解

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	
4	**8**	**6**	**2**	**3**	**8**	**7**	
ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ
3	**2**	**3**	**2**	**1**	**2**	**1**	**2**
タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌネ
6	**6**	**4**	**4**	**2**	**2**	**8**	**13**