2015年度センター試験　数学旧２Ｂ

第４問

１辺の長さが 1 のひし形 $OABC$ において、$\angle AOC = 120°$ とする。辺 AB を $2:1$ に内分する点を P とし、直線 BC 上に点 Q を $\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{OQ}$ となるようにとる。以下、$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とおく。

(1) 三角形 OPQ の面積を求めてみよう。$\overrightarrow{OP} = \dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\vec{a} + \dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{イ}}\vec{b}$ である。

実数 t を用いて $\overrightarrow{OQ} = (1-t)\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC}$ と表されるので、$\overrightarrow{OQ} = \boxed{エ}\, t\vec{a} + \vec{b}$ である。ここで、$\vec{a}\cdot\vec{b} = \dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}$, $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ} = \boxed{キ}$ であることから、$t = \dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$ である。

これらのことから、$\left|\overrightarrow{OP}\right| = \dfrac{\sqrt{\boxed{コ}}}{\boxed{サ}}$, $\left|\overrightarrow{OQ}\right| = \dfrac{\sqrt{\boxed{シス}}}{\boxed{セ}}$ である。よって、三角形 OPQ の面積 S_1 は $S_1 = \dfrac{\boxed{ソ}\sqrt{\boxed{タ}}}{\boxed{チツ}}$ である。

(2) 辺 BC を $1:3$ に内分する点を R とし、直線 OR と直線 PQ との交点を T とする。$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表し、三角形 OPQ と三角形 PRT の面積比を求めよう。

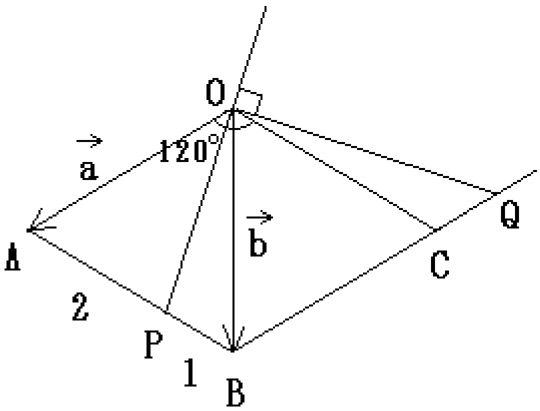
T は直線 OR 上の点であり、直線 PQ 上の点でもあるので、実数 r, s を用いて

$$\overrightarrow{OT} = r\,\overrightarrow{OR} = (1-s)\,\overrightarrow{OP} + s\,\overrightarrow{OQ}$$

と表すと、$r = \dfrac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}}$, $s = \dfrac{\boxed{ナ}}{\boxed{ニ}}$ となることがわかる。よって、

$\overrightarrow{OT} = \dfrac{\boxed{ヌネ}}{\boxed{ノハ}}\,\vec{a} + \dfrac{\boxed{ヒ}}{\boxed{フ}}\,\vec{b}$ である。

上で求めた $r\,,s$ の値から、三角形 OPQ の面積 S_1 と、三角形 PRT の面積 S_2 との比は、$S_1 : S_2 = \boxed{ヘホ} : 2$ である。



b

(1) $AP : PB = 2 : 1$ より

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\vec{a} + \frac{\mathbf{2}}{3}\,\vec{b}$$

となる。$\overrightarrow{OQ}$ は実数 t を用いて $\overrightarrow{OQ} = (1-t)\,\overrightarrow{OB} + t\,\overrightarrow{OC}$ と表される。

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ より

$$\overrightarrow{OQ} = (1-t)\,\overrightarrow{OB} + t\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) = \,-t\,\vec{a} + \vec{b}$$

である。$\angle AOB = 60\,°,\ OB = 1$　より

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}| \times \left|\vec{b}\right| \times \cos\angle AOB = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

また、$\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{OQ}$　より　$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ} = \mathbf{0}$　である。つまり

$$\left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\,\vec{b}\right)\cdot\left(-\,t\,\vec{a} + \vec{b}\right) = 0$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\,\vec{b}\right)\cdot\left(-\,t\,\vec{a} + \vec{b}\right) &= -\frac{1}{3}\,t\,|\vec{a}|^2 + \frac{2}{3}\,\left|\vec{b}\right|^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{2\,t}{3}\right)\,\vec{a}\cdot\vec{b} \\ &= -\frac{1}{3}\,t\,+\frac{2}{3}\,+\left(\frac{1}{3} - \frac{2\,t}{3}\right)\times\,\frac{1}{2} \\ &= -\frac{2}{3}\,t\,+\frac{5}{6}\end{aligned}$$

となることから、$t = \mathbf{\frac{5}{4}}$ である。

これらのことから、$\left|\overrightarrow{OP}\right|$, $\left|\overrightarrow{OQ}\right|$　の値を求める。

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{OP}\right|^2 &= \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\,\vec{b}\right)\cdot\,\left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\,\vec{b}\right) \\ &= \frac{1}{9}\,|\vec{a}|^2 + \frac{4}{9}\,\left|\vec{b}\right|^2 + \frac{4}{9}\,\vec{a}\cdot\,\vec{b} \\ &= \frac{7}{9}\end{aligned}$$

$$\left|\overrightarrow{OQ}\right|^2 = \left(-\frac{5}{4}\vec{a} + \vec{b}\right)\cdot\,\left(-\frac{5}{4}\vec{a} + \vec{b}\right)$$

$$= \frac{25}{16}\ |\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - \frac{5}{2}\ \vec{a}\cdot\ \vec{b}$$
$$= \frac{21}{16}$$

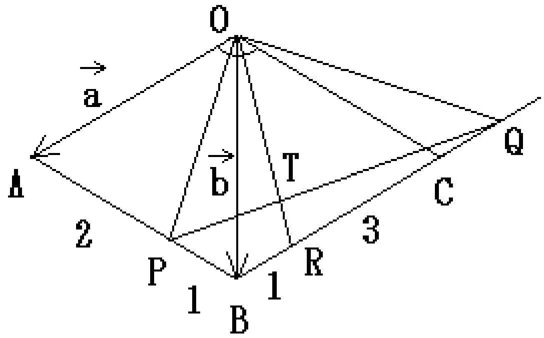
より

$$\left|\overrightarrow{OP}\right| = \sqrt{\frac{7}{9}} = \frac{\sqrt{\mathbf{7}}}{\mathbf{3}}\,,\qquad \left|\overrightarrow{OQ}\right| = \sqrt{\frac{21}{16}} = \frac{\sqrt{\mathbf{21}}}{\mathbf{4}}$$

である。よって、三角形 OPQ の面積 S_1 は

$$S_1 = \frac{1}{2} \times \left|\overrightarrow{OP}\right| \times \left|\overrightarrow{OQ}\right| = \frac{\mathbf{7\sqrt{3}}}{\mathbf{24}}$$

(2)



辺 BC を $1:3$ に内分する点を R とし､直線 OR と直線 PQ との交点を T とする。

$$\overrightarrow{OT} = r\,\overrightarrow{OR} = (1-s)\,\overrightarrow{OP} + s\,\overrightarrow{OQ}$$

とする。$BR:\ RC = 1:3$ より

$$\overrightarrow{OR} = \frac{3}{4}\,\overrightarrow{OB} + \frac{1}{4}\,\overrightarrow{OC} = \frac{3}{4}\,\vec{b} + \frac{1}{4}\left(\vec{b} - \vec{a}\right) = -\frac{1}{4}\,\vec{a} + \vec{b}$$

つまり、

$$\overrightarrow{OT} = -\frac{r}{4}\,\vec{a} + r\,\vec{b}$$

一方

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OT} &= (1-s)\,\overrightarrow{OP} + s\,\overrightarrow{OQ} \\ &= (1-s)\left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\,\vec{b}\right) + s\left(-\frac{5}{4}\vec{a} + \vec{b}\right) \\ &= \left(\frac{1}{3} - \frac{19}{12}s\right)\vec{a} + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}s\right)\vec{b}\end{aligned}$$

である。$\vec{a},\ \vec{b}$ は一次独立であることから

$$-\frac{r}{4} = \frac{1}{3} - \frac{19}{12}s,\ \ r = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}s$$

が成り立つ。この連立方程式を解くと、

$$r = \mathbf{\frac{7}{9}}\,, \qquad s = \mathbf{\frac{1}{3}}$$

となるため、

$$\overrightarrow{OT} = \mathbf{\frac{-7}{36}}\,\vec{a} + \mathbf{\frac{7}{9}}\,\vec{b}$$

　上で求めた $r\,,s$ の値から、三角形 OPQ の面積 S_1 と、三角形 PRT の面積 S_2 との比を求める。

$$\overrightarrow{OT} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{OP} + \frac{1}{3}\,\overrightarrow{OQ}$$

より、

$$PT : TQ = 1 : 2 \ \Rightarrow \ \ OPQ : OPT = 3 : 1 = 21 : 7$$

一方

$$\overrightarrow{OT} = \frac{7}{9}\,\overrightarrow{OR}$$

より

$$OT : TR = 7 : 2 \quad \Rightarrow \quad OPT : PRT = 7 : 2$$

以上から面積比は、$S_1 : S_2 = \ \mathbf{21} : 2$　である。

第４問の正解

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ
1	**3**	**2**	**－**	**1**	**2**	**0**
ク	ケ	コ	サ	シス	セ	ソ
5	**4**	**7**	**3**	**21**	**4**	**7**
タ	チツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌネ
3	**24**	**7**	**9**	**1**	**3**	**－7**
ノハ	ヒ	フ	ヘホ			
36	**7**	**9**	**21**			