

2015 年度センター試験 数学 2 B

第 5 問

次の表は、あるクラスの生徒 20 人に対して行われた英語と数学のテスト(各 50 点満点)の得点をまとめたものである。英語の得点を変数 x 、数学の得点を変数 y で表し、 x の平均値を $\bar{x}$ 、 y の平均値を $\bar{y}$ で表す。ただし、テストの得点は整数値である。また、表の数値はすべて正確な値であり、四捨五入されていないものとする。

番号	x	y	$(x - \bar{x})^2$	$y - \bar{y}$	$(y - \bar{y})^2$	$(x - \bar{x})(y - \bar{y})$
1	42	18	81.0	1.0	1.0	9.0
2	49	16	256.0	-1.0	1.0	-16.0
3	44	23	121.0	6.0	36.0	66.0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
18	39	18	36.0	1.0	1.0	6.0
19	30	10	9.0	-7.0	49.0	21.0
20	32	20	1.0	3.0	9.0	-3.0
合計	660	A	2000.0	B	500.0	353.0

以下、小数の形で解答する場合、指定された桁数の一つ下の桁を四捨五入し、解答せよ。途中で割り切れた場合、指定された桁まで ⑩ にマークすること。

(1) 変数 x の平均値 $\bar{x}$ は . 点である。

(2) 変数 y の平均値 $\bar{y}$ は . 点である。したがって、変数 y の合計 A の値は である。また、合計 B の値は . である。

(3) 変数 x と変数 y の相関係数の値は . である。

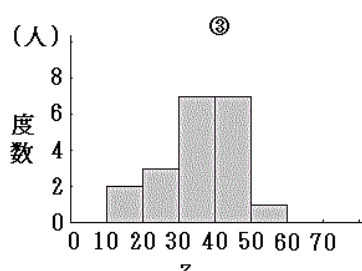
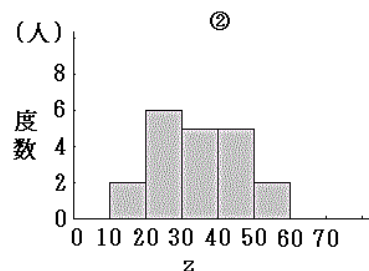
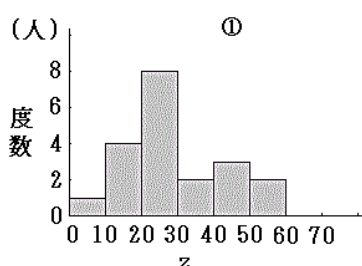
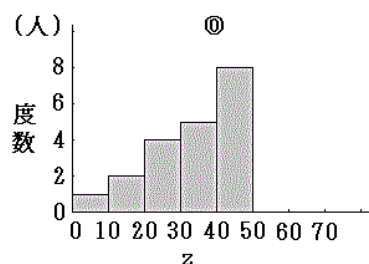
$x \backslash y$	0 以上 10 未満	10 以上 20 未満	20 以上 30 未満	30 以上 40 未満	40 以上 50 以下
0 以上 10 未満	0	0	0	0	0
10 以上 20 未満	1	1	1	0	0
20 以上 30 未満	0	C	1	0	0
30 以上 40 未満	0	D	4	0	0
40 以上 50 未満	1	3	2	0	0

(4) さらに、変量 x と変量 y の値をそれぞれ 10 ずつの区間に区切って、次の表を作成した。たとえば、変量 x の値が 30 以上 40 未満で変量 y の値が 20 以上 30 未満である度数は 4 である。

ここで、変量 x の値が 20 以上で変量 y の値が 10 以上である度数は 16 であり、変量 x の値が 30 未満で変量 y の値が 30 未満である度数は 8 である。このことから、表中の C の値は タ であり、 D の値は チ である。

(5) 新しい変量 w を $w = x + 50$ により定める。このとき、変量 w の平均値は ツテ . ト である。

次に、新しい変量 z を $z = 2y$ により定める。このとき、変量 z の分散の値は ナニヌ . ネノ である。また、変量 z のヒストグラムとして、最も適切なものは ハ である。 ハ に当てはまるものを、次の ① ~ ③ のうちから一つ選べ。



ここで、変量 x と変量 y の相関係数の値を r_1 、変量 z と変量 w の相関係数の値を r_2 とすると、 の関係がある。 に当てはまるものを、次の ① ～ ④ のうちから一つ選べ。

① $r_2 = r_1/4$ ① $r_2 = r_1/2$ ② $r_2 = r_1$ ③ $r_2 = 2r_1$ ③ $r_2 = 4r_1$

番号 i の生徒の変量 x, y の値をそれぞれ x_i, y_i と表す。

(1) 変量 x の合計 $x_1 + x_2 + \cdots + x_{20}$ が 660 であることから、変量 x の平均値 $\bar{x}$ は

$$\bar{x} = \frac{660}{20} = 33.0$$

(2) 番号が 1 の生徒の変量 y の値と平均値 $\bar{y}$ との差 $y_1 - \bar{y}$ は 1.0 であることから、

$$\bar{y} = y_1 - 1.0 = 17.0$$

変量 y の合計 A は平均値に生徒の人数を掛けた値と等しいため、

$$A = 20 \times \bar{y} = 20 \times 17.0 = 340$$

B は変量 $y - \bar{y}$ の合計である。この合計は

$$(y_1 + y_2 + \cdots + y_{20}) - \bar{y} \times 20$$

と表すことができる。これらの 2 つの値は等しいため $B = 0.0$ である。

(3) 相関係数は

$$\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x}) (y_i - \bar{y}) / \sqrt{\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{20} (y_i - \bar{y})^2}$$

と表すことができる。問題の 1 番目の表から該当する値を上の式に代入すると、相関係数は

$$\frac{353}{\sqrt{2000} \times \sqrt{500}} = \frac{353}{1000} = \mathbf{0.353}$$

となる。

(4) 変量 x の値が 20 以上で変量 y の値が 10 以上である範囲は表の赤枠で囲まれた部分。変量 x の値が 30 未満で変量 y の値が 30 未満である範囲は表の青枠で囲まれた部分になる。このことから

$$\begin{cases} C + D + 10 = 16 \\ C + 4 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = 4 \\ D = 2 \end{cases}$$

$x \backslash y$	0 以上 10 未満	10 以上 20 未満	20 以上 30 未満	30 以上 40 未満	40 以上 50 以下
0 以上 10 未満	0	0	0	0	0
10 以上 20 未満	1	1	1	0	0
20 以上 30 未満	0	C	1	0	0
30 以上 40 未満	0	D	4	0	0
40 以上 50 未満	1	3	2	0	0

(5) 新しい変量 w を $w = x + 50$ により定める。このとき、変量 w の平均値を求めると

$$\frac{1}{20} \{ (x_1 + 50) + (x_2 + 50) + \cdots + (x_{20} + 50) \}$$

$$= \frac{1}{20}(x_1 + x_2 + \cdots + x_{20}) + \frac{1}{20} \times 50 \times 20 = \bar{x} + 50 = \mathbf{83.0}$$

である。

次に、新しい変数 z を $z = 2y$ により定める。また、 $z_i = 2y_i$ とする。
このとき、変数 z の平均値 $\bar{z}$ について

$$\bar{z} = \frac{1}{20} \times (2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{20}) = 2\bar{y}$$

が成り立つ。このことから変数 z の分散の値を求めると

$$\begin{aligned} & \frac{1}{20} \times \{(z_1 - \bar{z})^2 + \cdots + (z_{20} - \bar{z})^2\} \\ &= \frac{1}{20} \times \{(2y_1 - 2\bar{y})^2 + \cdots + (2y_{20} - 2\bar{y})^2\} \\ &= 4 \times \frac{1}{20} \times \{(y_1 - \bar{y})^2 + \cdots + (y_{20} - \bar{y})^2\} \\ &= 4 \times \frac{1}{20} \times 500.0 \\ &= \mathbf{100.00} \end{aligned}$$

となる。2 番目の表から変数 z に関する度数は以下の通りとなる。

$z : 0$ 以上 20 未満	2
$z : 20$ 以上 40 未満	10
$z : 40$ 以上 60 未満	8

一方、選択肢のヒストグラム ㉠ ～ ㉢ より変数 z に関する度数を求めると以下の通りになる。

	①	②	③	④
$z : 0 \text{ 以上 } 20 \text{ 未満}$	3	5	2	2
$z : 20 \text{ 以上 } 40 \text{ 未満}$	9	10	11	10
$z : 40 \text{ 以上 } 60 \text{ 未満}$	8	5	7	8

よって、変数 z のヒストグラムとして、最も適切なものは表の度数と一致する③である。

ここで、変数 x と変数 y の相関係数の値を r_1 、変数 z と変数 w の相関係数の値を r_2 とする。このとき

$$\begin{aligned} w_i - \bar{w} &= (x_i + 50) - (\bar{x} + 50) = x_i - \bar{x} \\ z_i - \bar{z} &= 2y_i - 2\bar{y} = 2(y_i - \bar{y}) \end{aligned}$$

が成り立つ。このことから

$$\sum_{i=1}^{20} (w_i - \bar{w})(z_i - \bar{z}) = 2 \sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{20} (w_i - \bar{w})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{20} (z_i - \bar{z})^2} = 2 \sqrt{\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{20} (y_i - \bar{y})^2}$$

となるため、二つの相関係数について ② $r_2 = r_1$ が成り立つ。

第4問の正解

アイウ	エオカ	キクケ	コサ
33.0	17.0	340	0.0
シスセソ	タ	チ	ツテト
0.353	4	2	83.0
ナニヌネノ	ハ	ヒ	
100.00	3	2	