

2015 年度センター試験 数学 2 B

第 6 問

(1) 自然数 M, N は $M > N$ であり、最大公約数が 1 であるとする。このとき、分数 $\frac{M}{N}$ に対して、次の (i) ~ (iii) の手順を考える。

(i) M を N で割ったときの商を Q 、余りを R とする。

(ii) $R > 0$ ならば M に N の値を代入し、次に N に R の値を代入して (i) に戻る。

(iii) $R = 0$ ならば終了する。

この手順は、繰り返しのたびに R が小さくなり、何回かの後に必ず $R = 0$ となって終了する。そこで、 $R = 0$ となるまでに (i) が実行された回数を K として、(i) に現れる (M, N, Q, R) を実行順に、 $(M_1, N_1, Q_1, R_1), (M_2, N_2, Q_2, R_2), \dots, (M_K, N_K, Q_K, R_K)$ と表す。このようにして得られる商の列 $Q_1, Q_2, \dots, Q_K$ について考えてみよう。

たとえば、分数 $\frac{10}{7}$ の場合には (i) ~ (iii) の手順により、商の列 1, 2, 3 が得られる。

$$\begin{array}{llll} M_1 = 10, & N_1 = 7, & Q_1 = 1, & R_1 = \boxed{\text{ア}} \\ M_2 = 7, & N_2 = \boxed{\text{ア}}, & Q_2 = 2, & R_2 = 1, \\ M_3 = \boxed{\text{ア}}, & N_3 = 1, & Q_3 = 3, & R_3 = \boxed{\text{イ}} \end{array}$$

また、商の列 1, 2, 3 を用いて、 $\frac{10}{7}$ は次のように表すことができる。

$$\frac{10}{7} = \frac{M_1}{N_1} = Q_1 + \frac{M_2}{N_2} = Q_1 + \frac{1}{Q_2 + \frac{N_3}{M_3}} = Q_1 + \frac{1}{Q_2 + \frac{1}{Q_3}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}$$

この手順にしたがって、自然数 M, N を入力して、分数 $\frac{M}{N}$ に対応する商の列 $Q_1, Q_2, \dots, Q_K$ を求めるための [プログラム 1] を作成した。ただし、INT

(X) は X を超えない最大の整数を表す関数である。

[プログラム 1]

```
100 INPUT M
110 INPUT N
120 LET Q = INT (M/N)
130 PRINT Q
140 LET R = 
150 LET M = N
160 LET N = 
170 IF R>0 THEN GOTO 120
180 END
```

[プログラム 1] の 、 に当てはまるものを、次の ① ～ ⑦ のうちから一つずつ選べ。ただし、同じものを選んでよい。

- | | | | |
|---------|---------|---------|---------|
| ④ 0 | ① 1 | ② Q | ③ R |
| ⑤ M-Q*N | ⑥ M-R*N | ⑦ N-Q*M | ⑧ N-R*M |

[プログラム 1] を実行して変数 M に 47、変数 N に 10 を入力し、分数 $\frac{47}{10}$ に対応する商の列を求めた。130 行で出力される変数 Q の値は順に 4, 1, 、 であり、150 行が 3 回実行された直後の変数 M の値は である。

(2) K 個の商の列 $Q_1, Q_2, \dots, Q_K$ を順に入力し、最後に入力の終了を表す 0 を入力して、対応する分数を求めるための [プログラム 2] を作成した。

たとえば、[プログラム 2] を実行して、変数 Q に 、 、 4, 0 と順に入力すれば、180 行で分数 $\frac{47}{10}$ が出力される。

[プログラム 2]

```
100 LET M = 1
110 LET N = 0
120 INPUT Q
130 IF Q=0 THEN GOTO 180
140 LET R = 
150 LET N = M
160 LET M = 
170 GOTO 120
180 PRINT M ; "/" ; N
190 END
```

[プログラム 2] の 、 に当てはまるものを、次の ① ～ ⑦のうちから一つずつ選べ。ただし、同じものを選んでよい。

- | | | | |
|-----|-----|-----------|-----------|
| ① 0 | ④ 1 | ⑦ M | ③ N |
| ② Q | ⑤ R | ⑥ $Q*N+R$ | ⑧ $R*N+Q$ |

[プログラム 1] を実行して変数 Q に 2, 3, 1, 5, 0 と順に入力すれば、180 行で出力される分数は / である。このとき、150 行が 3 回実行された直後の変数 N の値は である。

分数 $\frac{10}{7}$ の場合に、(i) ～ (iii) の手順を進める。

(i) 10 を 7 で割ると商が 1、余りが 3 であるため、

$$M_1 = 10, \quad N_1 = 7, \quad Q_1 = 1, \quad R_1 = 3$$

となる。

(ii) $R_1 > 0$ であることから、 M_2 に $N_1 = 7$ を、 N_2 に $R_1 = 3$ を代入する。
先ほどと同様に 7 を 3 で割った結果を求めると

$$M_2 = 7, \quad N_2 = 3, \quad Q_2 = 2, \quad R_2 = 1$$

となる。

再び $R_2 > 0$ であることから、 M_3 に $N_2 = 3$ を、 N_3 に $R_2 = 1$ を代入し、3 を 1 で割った結果を求めると

$$M_3 = 3, \quad N_3 = 1, \quad Q_3 = 3, \quad R_3 = 0$$

となる。

(iii) ここで $R_3 = 0$ となったため、手順を終了する。

以上により、商の列 1, 2, 3 が得られる。

一般に M_i, N_i が与えられたとき、 Q_i, R_i には

$$M_i = Q_i \times N_i + R_i \Leftrightarrow \frac{M_i}{N_i} = Q_i + \frac{R_i}{N_i}$$

($0 \leq R_i < N_i$) という関係がある。このことから Q_i は M_i/N_i を超えない最大の整数であり、 $R_i = M_i - Q_i \times N_i$ であることが分かる。したがって [プログラム 1] において

```
120 LET Q = INT (M/N)
130 PRINT Q
140 LET R = M-Q*N
```

(140 行には選択肢の ④ が入る) となる。

次に M_{i+1}, N_{i+1} の値を決める手順を進める。問題の手順 (ii) より

$$M_{i+1} = N_i, \quad N_{i+1} = R_i$$

となるため、[プログラム 1] において

```
150 LET M = N
160 LET N = R
170 IF R>0 THEN GOTO 120
180 END
```

(160 行には選択肢の ③ が入る) となる。

[プログラム 1] を実行して変数 M に 47、変数 N に 10 を入力し、分数 $\frac{47}{10}$ に対応する商の列を求めた。170 行の判定が i 回行われた後の変数 M, N, Q, R の値は、これまでの説明から順に $M_{i+1}, N_{i+1}, Q_i, R_i$ の値になることから、変数 M, N, Q, R の値を順に求めると

170 行の判定が 1 回実行された後

$$M = 10, \quad N = 7, \quad Q = 4, \quad R = 7$$

170 行の判定が 2 回実行された後

$$M = 7, \quad N = 3, \quad Q = 1, \quad R = 3$$

170 行の判定が 3 回実行された後

$$M = 3, \quad N = 1, \quad Q = 2, \quad R = 1$$

170 行の判定が 4 回実行された後

$$M = 1, \quad N = 0, \quad Q = 3, \quad R = 0$$

となる。したがって、130 行で出力される変数 Q の値は順に 4, 1, 2, 3 であり、150 行が 3 回実行された直後の変数 M の値は 3 である。

(2) K 個の商の列 $Q_1, Q_2, \dots, Q_K$ を順に入力し、最後に入力の終了を表す 0 を入力して、対応する分数を求めるための [プログラム 2] を作成する。

[プログラム 1] において、プログラムが終了したときの変数 M の値は最初に入力された M と N の最大公約数である 1 になる。このため、プログラムが終了したときの変数の値は

$$M = M_{K+1} = 1, \quad N = N_{K+1} = 0, \quad Q = Q_K, \quad R = R_K = 0$$

という関係が成り立つ。このためプログラムを進めるためには初期値として $M = 1, N = 0, R = N$ を置く必要がある。よって、

140 LET $R = N$

(140 行には選択肢の ③ が入る) となる。

次に $M_{i+1}, N_{i+1}, Q_i, R_i$ から M_i, N_i を求める。(1) の説明から

$$N_i = M_{i+1}, \quad M_i = Q_i \times N_i + R_i$$

という式が成り立つため、

```
150 LET N = M
160 LET M = Q * N + R
```

(160 行には選択肢の ⑥ が入るというプログラムになる。

たとえば、[プログラム 2] を実行して、変数 **Q** に **3, 2, 1, 4, 0** と順に入力すれば、180 行で分数 **47/10** が出力される。

[プログラム 1] を実行して変数 **Q** に **2, 3, 1, 5, 0** と順に入力する場合、変数は以下の通りに変化する。

160 行が 1 回実行された後				
M = 2,	N = 1,	Q = 2,	R = 0	
160 行が 2 回実行された後				
M = 7,	N = 2,	Q = 3,	R = 1	
160 行が 3 回実行された後				
M = 9,	N = 7,	Q = 1,	R = 2	
160 行が 4 回実行された後				
M = 52,	N = 9,	Q = 5,	R = 7	

この次、変数 **N** に **9** が入力されるため、[プログラム 2] は終了する。

これにより、180 行で出力される分数は **52/9** である。このとき、150 行が 3 回実行された直後の変数 **N** の値は **7** である。

第 6 問の正解

ア	イ	ウ	エ	オ	カ
3	0	4	3	2	3
キ	ク	ケ	コサ	シ	ス
3	3	6	52	9	7