

2016 年度センター試験 数学 1

第 1 問

[1] a を実数とする。 x の関数

$$f(x) = (1 + 2a)(1 - x) + (2 - a)x$$

を考える。

$$f(x) = (-\boxed{\text{ア}}a + \boxed{\text{イ}})x + 2a + 1$$

である。

(1) $0 \leq x \leq 1$ における $f(x)$ の最小値は

$$a \leq \frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ア}}} \text{ のとき } \boxed{\text{ウ}}a + \boxed{\text{エ}} \text{ であり}$$

$$a > \frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ア}}} \text{ のとき } \boxed{\text{オ}}a + \boxed{\text{カ}} \text{ である。}$$

(2) $0 \leq x \leq 1$ において、常に $f(x) \geq \frac{2(a+2)}{3}$ となる a の値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}} \leq a \leq \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}} \text{ である。}$$

(3) $0 \leq x \leq 1$ における $f(x)$ の最小値を $g(a)$ とおき、 a の関数と考える。

$$a \text{ が } \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}} \leq a \leq \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}} \text{ の範囲にあるとき、}$$

$$g(a) \text{ の最小値は } \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} \text{ であり、 } g(a) \text{ の最大値は } \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}} \text{ である。}$$

$f(x)$ の右辺を変形すると

$$\begin{aligned} f(x) &= -(1 + 2a)x + (2 - a)x + 2a + 1 \\ &= (-3a + 1)x + 2a + 1 \end{aligned}$$

である。

(1) $0 \leq x \leq 1$ における $f(x)$ の最小値を考える。

$a \leq \frac{1}{3}$ のとき $-3a + 1 \geq 0$ であるため、関数 $f(x)$ は増加関数または定数関数である。よって $f(x)$ の最小値は $f(0) = 2a + 1$ である。

$a > \frac{1}{3}$ のとき $-3a + 1 < 0$ であるため、関数 $f(x)$ は減少関数である。よって $f(x)$ の最小値は $f(1) = -a + 2$ である。

(2) $0 \leq x \leq 1$ において、常に $f(x) \geq \frac{2(a+2)}{3}$ となる a の値の範囲を求める。

$a \leq \frac{1}{3}$ のとき、 $0 \leq x \leq 1$ における $f(x)$ の最小値は $2a + 1$ であるため、常に $f(x) \geq \frac{2(a+2)}{3}$ となる a の値の範囲は

$$2a + 1 \geq \frac{2(a+2)}{3} \Rightarrow 6a + 3 \geq 2a + 4 \Rightarrow a \geq \frac{1}{4}$$

より $\frac{1}{4} \leq a \leq \frac{1}{3}$ となる。

$a > \frac{1}{3}$ のとき、 $0 \leq x \leq 1$ における $f(x)$ の最小値は $-a + 2$ であるため、常に $f(x) \geq \frac{2(a+2)}{3}$ となる a の値の範囲は

$$-a + 2 \geq \frac{2(a+2)}{3} \Rightarrow -3a + 6 \geq 2a + 4 \Rightarrow a \leq \frac{2}{5}$$

より $\frac{1}{3} < a \leq \frac{2}{5}$ となる。

以上から、求める a の範囲は $\frac{1}{4} \leq a \leq \frac{2}{5}$ である。

(3) $0 \leq x \leq 1$ における $f(x)$ の最小値を $g(a)$ とおき、 a の関数とする。(1)の結果から

$$g(a) = 2a + 1 \left(a \leq \frac{1}{3} \text{ のとき} \right), \quad -a + 2 \left(a > \frac{1}{3} \text{ のとき} \right)$$

となる。 a の範囲が $\frac{1}{4} \leq a \leq \frac{2}{5}$ であるとき、 $g(a)$ の増減を調べると

a	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{5}$
$g(a)$	$\frac{3}{2}$	増加	$\frac{5}{3}$	減少	$\frac{8}{5}$

となるため、 $g(a)$ の最小値は $\frac{3}{2}$ であり、 $g(a)$ の最大値は $\frac{5}{3}$ である。

[1] の正解

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ ク	ケ コ	サ シ	ス セ
3	1	2	1	—	2	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$

[2] 次の問いに答えよ。必要ならば、 $\sqrt{7}$ が無理数であることを用いてよい。

(1) A を有理数全体の集合、 B を無理数全体の集合とする。空集合を $\emptyset$ と表す。

次の (i) ~ (iv) が真の命題になるように、 $\boxed{\text{ソ}}$ ~ $\boxed{\text{ツ}}$ に当てはまるものを、下の ① ~ ⑤ のうちから一つずつ選べ。ただし、同じものを繰り返し選んでもよい。

(i) $A \boxed{\text{ソ}} \{0\}$

(ii) $\sqrt{28} \boxed{\text{タ}} B$

(iii) $A = \{0\} \boxed{\text{チ}} A$

(iv) $\emptyset = A \boxed{\text{ツ}} B$

① $\in$

② $\exists$

③ $\subset$

④ $\supset$

⑤ $\cap$

⑥ $\cup$

(2) 実数 x に対する条件 p, q, r を次のように定める。

$p : x$ は無理数。

$q : x + \sqrt{28}$ は有理数。

$r : \sqrt{28}x$ は有理数。

次の $\boxed{\text{テ}}$ 、 $\boxed{\text{ト}}$ に当てはまるものを、下の ① ~ ③ のうちから一つずつ選べ。ただし、同じものを繰り返し選んでもよい。

p は q であるための $\boxed{\text{テ}}$ 。

p は r であるための $\boxed{\text{ト}}$ 。

① 必要十分条件である。

② 必要条件であるが、十分条件でない。

③ 十分条件であるが、必要条件でない。

④ 必要条件でも十分条件でもない。

まず $\sqrt{28} = 2\sqrt{7}$ であることから $\sqrt{28}$ は無理数である。

(1)

(i) $\{0\}$ は集合を表し、この集合の要素は有理数である 0 のみである。よって $\{0\}$ は有理数の集合 A の部分集合である。よって $A \supset \{0\}$ となる。

(ii) $\sqrt{28}$ は無理数の集合 B の要素である。よって $\sqrt{28} \in B$ となる。

(iii) 先ほどの (i) から $A = \{0\} \cup A$ となる。

(iv) 有理数の集合 A と無理数の集合 A は共通の要素を持たないため $\emptyset = A \cap B$ となる。

(2) 条件 p, q について命題 $p \Rightarrow q$ および $q \Rightarrow p$ の真偽を調べる。

・ $p \Rightarrow q$ つまり 「 x は無理数」 $\Rightarrow$ 「 $x + \sqrt{28}$ は有理数」について

$x = \sqrt{7}$ のとき x は無理数であり、 $x + \sqrt{28} = 3\sqrt{7}$ も無理数である。よって $p \Rightarrow q$ は偽である。

・ $q \Rightarrow p$ つまり 「 $x + \sqrt{28}$ は有理数」 $\Rightarrow$ 「 x は無理数」について

背理法を使う。 $x + \sqrt{28}$ は有理数であるとき x も有理数であるならば、

$\sqrt{28} = (x + \sqrt{28}) - x$ も有理数になる。これは成り立たないため、 x は無理数である。よって $q \Rightarrow p$ は真である。

以上から p は q であるための必要条件であるが、十分条件でない。

条件 p, r について命題 $p \Rightarrow r$ および $r \Rightarrow p$ の真偽を調べる。

・ $p \Rightarrow r$ つまり 「 x は無理数」 $\Rightarrow$ 「 $\sqrt{28}x$ は有理数」について

$x = \sqrt{2}$ のとき x は無理数であり、 $\sqrt{28}x = 2\sqrt{14}$ も無理数である。よって

$p \Rightarrow r$ は偽である。

・ $r \Rightarrow p$ つまり「 $\sqrt{28}x$ は有理数」 $\Rightarrow$ 「 x は無理数」について

対偶を取ると「 x は有理数」 $\Rightarrow$ 「 $\sqrt{28}x$ は無理数」となる。 $x = 0$ のとき x は有理数であり、 $\sqrt{28}x = 0$ も有理数である。対偶が偽であるため、 $r \Rightarrow p$ も偽である。

以上から p は r であるための必要条件でも十分条件でもない。

[2] の正解

ソ	タ	チ	ツ	テ	ト
3	0	5	4	1	3