

2016 年度センター試験 数学 1

第 3 問

$\triangle ABC$ において $AB = 4$, $BC = 6$, $CA = \frac{10}{3}$ とする。このとき、

$$\cos \angle BAC = \frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}, \quad \sin \angle BAC = \frac{\boxed{\text{エ}}\sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{カ}}},$$

である。また、 $\triangle ABC$ の面積は $\frac{\boxed{\text{キク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}}{\boxed{\text{コ}}}$ 、 $\triangle ABC$ の外接円の中心を O と

すると、外接円 O の半径は $\frac{\boxed{\text{サ}}\sqrt{\boxed{\text{シ}}}}{\boxed{\text{ス}}}$ である。

$\angle BAC$ の二等分線と外接円 O の交点で A とは異なる点を D とすると、円周角と中心角の関係より

$$\cos \angle BOD = \frac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$$

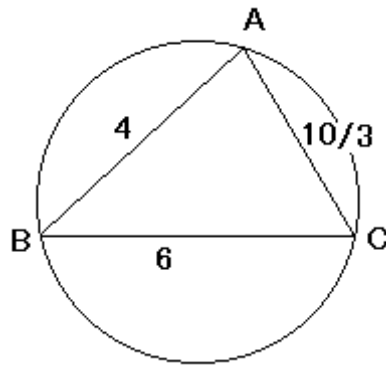
であるから、 $BD = \boxed{\text{チ}}\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}$ である。したがって、

$$\frac{\sin \angle BCA}{\sin \angle BCD} = \frac{\boxed{\text{テ}}\sqrt{\boxed{\text{ト}}}}{\boxed{\text{ナ}}}$$

であり、

$$\frac{\Delta ABC \text{ の面積}}{\Delta DBC \text{ の面積}} = \frac{\boxed{\text{ニ又}}}{\boxed{\text{ネノ}}}$$

である。



余弦定理より

$$\begin{aligned}\cos \angle BAC &= \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 AB \times AC} \\ &= \left(16 + \frac{100}{9} - 36\right) \times \frac{1}{2 \times 4 \times 3/10} \\ &= \frac{-1}{3}\end{aligned}$$

となり、

$$\sin \angle BAC = \sqrt{1 - (\cos \angle BAC)^2} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

となる。また、 ΔABC の面積は

$$\frac{1}{2} \times BA \times CA \times \sin \angle BAC = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{10}{3} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{40\sqrt{2}}{9}$$

であり、 ΔABC の外接円の中心を O とすると、外接円 O の半径 OA は正弦

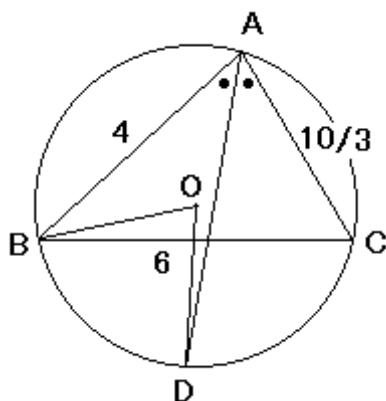
定理から

$$2OA = \frac{BC}{\sin \angle BAC} = 6 \times \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$$

より、外接円 O の半径 OA の長さは

$$OA = \frac{9\sqrt{2}}{4}$$

である。



$\angle BAC$ の二等分線と外接円 O の交点で A とは異なる点を D とする。円周角と中心角の関係より

$$\angle BOD = 2 \times \angle BAD = \angle BAC$$

であるため、

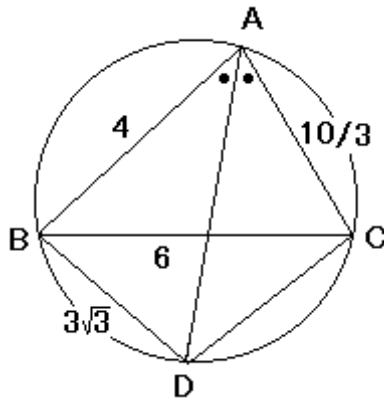
$$\cos \angle BOD = \cos \angle BAD = \frac{-1}{3}$$

である。 $\triangle BOD$ に余弦定理を使い BD を求める。

$$BD^2 = BO^2 + DO^2 - 2 \times BO \times DO \times \cos \angle BOD$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{81}{8} + \frac{81}{8} - 2 \times \frac{81}{8} \times \left(-\frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{8}{3} \times \frac{81}{8} = 27
\end{aligned}$$

よって、 $BD = 3\sqrt{3}$ である。



正弦定理より

$$2OA = \frac{BA}{\sin \angle BCA} = \frac{BD}{\sin \angle BCD}$$

であることから、

$$\frac{\sin \angle BCA}{\sin \angle BCD} = \frac{BA}{BD} = \frac{4}{3\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{9}$$

である。

$\angle BAD = \angle DAC$ であることから、 $BD = DC$. よって $\triangle ABC$ と $\triangle DBC$ の面積は以下のように表すことができる。

$$\triangle ABC \text{ の面積} = \frac{1}{2} \times BC \times AC \times \sin \angle BCA = 10 \sin \angle BCA$$

$$\triangle DBC \text{ の面積} = \frac{1}{2} \times BC \times DC \times \sin \angle BCD = 9\sqrt{3} \sin \angle BCD$$

以上から、

$$\frac{\triangle ABC \text{ の面積}}{\triangle DBC \text{ の面積}} = \frac{10 \sin \angle BCA}{9\sqrt{3} \sin \angle BCD} = \frac{10}{9\sqrt{3}} \times \frac{4\sqrt{3}}{9} = \frac{40}{81}$$

である。

第3問の正解

$\frac{\text{アイ}}{\text{ウ}}$	$\frac{\text{エ}\sqrt{\text{オ}}}{\text{カ}}$	$\frac{\text{キク}\sqrt{\text{ケ}}}{\text{コ}}$	$\frac{\text{サ}\sqrt{\text{シ}}}{\text{ス}}$
$-\frac{1}{3}$	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$	$\frac{40\sqrt{2}}{9}$	$\frac{9\sqrt{2}}{4}$
$\frac{\text{セソ}}{\text{タ}}$	$\text{チ}\sqrt{\text{ツ}}$	$\frac{\text{テ}\sqrt{\text{ト}}}{\text{ナ}}$	$\frac{\text{ニヌ}}{\text{ネノ}}$
$-\frac{1}{3}$	$3\sqrt{3}$	$\frac{4\sqrt{3}}{9}$	$\frac{40}{81}$