

2016 年度センター試験 数学 1・数学 A

第 1 問

[1] a を実数とする。 x の関数

$$f(x) = (1 + 2a)(1 - x) + (2 - a)x$$

を考える。

$$f(x) = (-\boxed{\text{ア}}a + \boxed{\text{イ}})x + 2a + 1$$

である。

(1) $0 \leq x \leq 1$ における $f(x)$ の最小値は

$$a \leq \frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ア}}} \text{ のとき } \boxed{\text{ウ}}a + \boxed{\text{エ}} \text{ であり}$$

$$a > \frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ア}}} \text{ のとき } \boxed{\text{オ}}a + \boxed{\text{カ}} \text{ である。}$$

(2) $0 \leq x \leq 1$ において、常に $f(x) \geq \frac{2(a+2)}{3}$ となる a の値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}} \leq a \leq \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}} \text{ である。}$$

$f(x)$ の右辺を変形すると

$$\begin{aligned} f(x) &= -(1 + 2a)x + (2 - a)x + 2a + 1 \\ &= (-3a + 1)x + 2a + 1 \end{aligned}$$

である。

(1) $0 \leq x \leq 1$ における $f(x)$ の最小値を考える。

$a \leq \frac{1}{3}$ のとき $-3a + 1 \geq 0$ であるため、関数 $f(x)$ は増加関数または定数関数である。よって $f(x)$ の最小値は $f(0) = 2a + 1$ である。

$a > \frac{1}{3}$ のとき $-3a + 1 < 0$ であるため、関数 $f(x)$ は減少関数である。よって $f(x)$ の最小値は $f(1) = -a + 2$ である。

(2) $0 \leq x \leq 1$ において、常に $f(x) \geq \frac{2(a+2)}{3}$ となる a の値の範囲を求める。

$a \leq \frac{1}{3}$ のとき、 $0 \leq x \leq 1$ における $f(x)$ の最小値は $2a + 1$ であるため、常に $f(x) \geq \frac{2(a+2)}{3}$ となる a の値の範囲は

$$2a + 1 \geq \frac{2(a+2)}{3} \Rightarrow 6a + 3 \geq 2a + 4 \Rightarrow a \geq \frac{1}{4}$$

より $\frac{1}{4} \leq a \leq \frac{1}{3}$ となる。

$a > \frac{1}{3}$ のとき、 $0 \leq x \leq 1$ における $f(x)$ の最小値は $-a + 2$ であるため、常に $f(x) \geq \frac{2(a+2)}{3}$ となる a の値の範囲は

$$-a + 2 \geq \frac{2(a+2)}{3} \Rightarrow -3a + 6 \geq 2a + 4 \Rightarrow a \leq \frac{2}{5}$$

より $\frac{1}{3} < a \leq \frac{2}{5}$ となる。

以上から、求める a の範囲は $\frac{1}{4} \leq a \leq \frac{2}{5}$ である。

[1] の正解

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	$\frac{\text{キ}}{\text{ク}}$	$\frac{\text{ケ}}{\text{コ}}$
3	1	2	1	－	2	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{5}$

[2] 次の問いに答えよ。必要ならば、 $\sqrt{7}$ が無理数であることを用いてよい。

(1) A を有理数全体の集合、 B を無理数全体の集合とする。空集合を $\emptyset$ と表す。

次の (i) ~ (iv) が真の命題になるように、 $\boxed{\text{サ}}$ ~ $\boxed{\text{セ}}$ に当てはまるものを、下の ① ~ ⑤ のうちから一つずつ選べ。ただし、同じものを繰り返し選んでもよい。

(i) $A \boxed{\text{サ}} \{0\}$ (ii) $\sqrt{28} \boxed{\text{シ}} B$

(iii) $A = \{0\} \boxed{\text{ス}} A$ (iv) $\emptyset = A \boxed{\text{セ}} B$

① $\in$ ② $\exists$ ③ $\subset$ ④ $\supset$ ⑤ $\cap$ ⑥ $\cup$

(2) 実数 x に対する条件 p, q, r を次のように定める。

$p : x$ は無理数。

$q : x + \sqrt{28}$ は有理数。

$r : \sqrt{28}x$ は有理数。

次の $\boxed{\text{ソ}}$ 、 $\boxed{\text{タ}}$ に当てはまるものを、下の ① ~ ③ のうちから一つずつ選べ。ただし、同じものを繰り返し選んでもよい。

p は q であるための $\boxed{\text{ソ}}$ 。

p は r であるための $\boxed{\text{タ}}$ 。

- ① 必要十分条件である。
- ② 必要条件であるが、十分条件でない。
- ③ 十分条件であるが、必要条件でない。
- ④ 必要条件でも十分条件でもない。

まず $\sqrt{28} = 2\sqrt{7}$ であることから $\sqrt{28}$ は無理数である。

(1)

(i) $\{0\}$ は有理数である 0 からなる集合である。よって $\{0\}$ は有理数の集合 A の部分集合であることから $A \supset \{0\}$ となる。

(ii) $\sqrt{28}$ は無理数の集合 B の要素である。よって $\sqrt{28} \in B$ となる。

(iii) 先ほどの (i) から $A = \{0\} \cup A$ となる。

(iv) 有理数の集合 A と無理数の集合 A は共通の要素を持たないため $\emptyset = A \cap B$ となる。

(2) 条件 p, q について命題 $p \Rightarrow q$ および $q \Rightarrow p$ の真偽を調べる。

・ $p \Rightarrow q$ つまり 「 x は無理数」 $\Rightarrow$ 「 $x + \sqrt{28}$ は有理数」について

$x = \sqrt{7}$ のとき x は無理数であり、 $x + \sqrt{28} = 3\sqrt{7}$ も無理数である。よって $p \Rightarrow q$ は偽である。

・ $q \Rightarrow p$ つまり 「 $x + \sqrt{28}$ は有理数」 $\Rightarrow$ 「 x は無理数」について

背理法を使う。 $x + \sqrt{28}$ は有理数であるとき x も有理数であるならば、

$\sqrt{28} = (x + \sqrt{28}) - x$ も有理数になる。これは成り立たないため、 x は無理数である。よって $p \Rightarrow q$ は真である。

以上から p は q であるための必要条件であるが、十分条件でない。

条件 p, r について命題 $p \Rightarrow r$ および $r \Rightarrow p$ の真偽を調べる。

・ $p \Rightarrow r$ つまり 「 x は無理数」 $\Rightarrow$ 「 $\sqrt{28}x$ は有理数」について

$x = \sqrt{2}$ のとき x は無理数であり、 $\sqrt{28}x = 2\sqrt{14}$ も無理数である。よって

$p \Rightarrow r$ は偽である。

・ $r \Rightarrow p$ つまり「 $\sqrt{28}x$ は有理数」 $\Rightarrow$ 「 x は無理数」について

対偶を取ると「 x は有理数」 $\Rightarrow$ 「 $\sqrt{28}x$ は無理数」となる。 $x = 0$ のとき x は有理数であり、 $\sqrt{28}x = 0$ も有理数である。対偶が偽であるため、 $p \Rightarrow r$ も偽である。

以上から p は r であるための必要条件でも十分条件でもない。

[2] の正解

サ	シ	ス	セ	ソ	タ
3	0	5	4	1	3

[3] a を 1 以上の定数とし、 x についての連立不等式

$$\begin{cases} x^2 + (20 - a^2)x - 20a^2 \leq 0 & \dots\dots\dots ① \\ x^2 + 4ax \geq 0 & \dots\dots\dots ② \end{cases}$$

を考える。このとき、不等式 ① の解は $\boxed{\text{チツテ}} \leq x \leq a^2$ である。また、

不等式 ② の解は $x \leq \boxed{\text{トナ}} a, \boxed{\text{ニ}} \leq x$ である。

この連立不等式を満たす負の実数が存在するような a の値の範囲は

$$1 \leq a \leq \boxed{\text{ヌ}}$$

である。

不等式 ① の左辺を変形すると

$$x^2 + (20 - a^2)x - 20a^2 = (x + 20)(x - a^2)$$

となる。 $a^2 \geq 0$ より不等式 ① の解は $-20 \leq x \leq a^2$ である。

一方、不等式 ② の左辺を変形すると

$$x^2 + 4ax = x(x + 4a)$$

となる。 $-4a \leq -4 < 0$ より不等式 ② の解は $x \leq -4a, 0 \leq x$ である。

不等式 ① を満たす負の実数の部分は $-20 \leq x < 0$ であり、不等式 ② を満たす負の実数の部分は $x \leq -4a$ である。

つまり、この連立不等式を満たす負の実数 x が存在するとき、 x の値は $-20 \leq x \leq -4a$ を満たしている。この範囲が存在するような a の値の範囲は $-20 \leq -4a \Rightarrow a \leq 5$ である。 a の条件も加えると求める a の値の範囲は

$$1 \leq a \leq 5$$

である。

[3] の正解

チツテ	トナ	ニ	ヌ
-20	-4	0	5