2016年度センター試験　数学1・数学A

第2問

[1] ΔABC の辺の長さと角の大きさを測ったところ、$AB = 7\sqrt{3}$ および $\angle ACB = 60°$ であった。したがって、ΔABC の外接円 O の半径は $\boxed{\text{ア}}$ である。

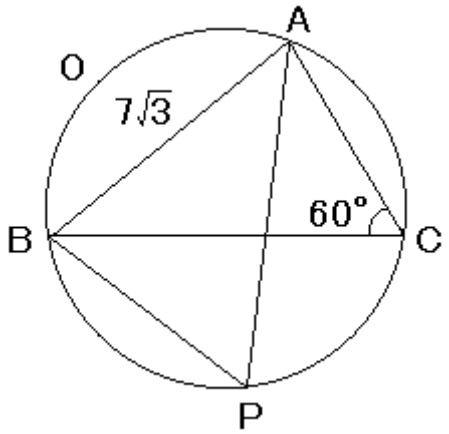
外接円 O の、点 C を含む弧 AB 上で点 P を動かす。

(1) $2\,PA = 3\,PB$ となるのは $PA = \boxed{\text{イ}}\sqrt{\boxed{\text{ウエ}}}$ のときである。

(2) ΔABC の面積が最大となるのは $PA = \boxed{\text{オ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}$ のときである。

(3) $\sin\angle PBA$ の値が最大となるのは $PA = \boxed{\text{キ}}$ のときであり、このとき

ΔABC の面積は $\dfrac{\boxed{\text{クコ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シ}}}$ である。



外接円 O の半径を R とすると、正弦定理より

$$2R = \frac{AB}{\sin\angle ACB} = 7\sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}\,/\,2} = 14 \;\;\Rightarrow\;\; R = \mathbf{7}$$

外接円 O の、点 C を含む弧 AB 上で点 P を動かす。

(1) 点 P は弧 AB 上にあるため、円周角の定理から $\angle APB = \angle ACB = 60°$ である。

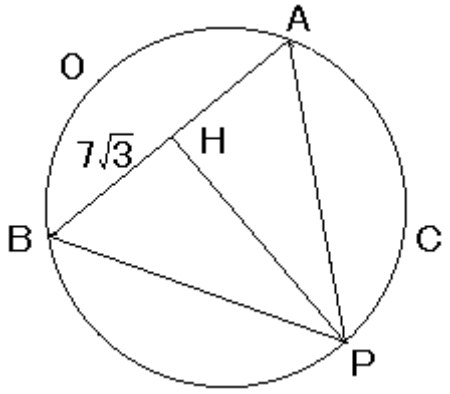
余弦定理に $2\,PA = 3\,PB \;\Rightarrow PB = \frac{2}{3}PA$ を代入すると

$$\begin{aligned} AB^2 &= PA^2 + PB^2 - 2PA \times PB \times \cos\angle APB \\ &= PA^2 + \left(\frac{2}{3}PA\right)^2 - 2PA \times \frac{2}{3}PA \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{7}{9}PA^2 \end{aligned}$$

となる。よって

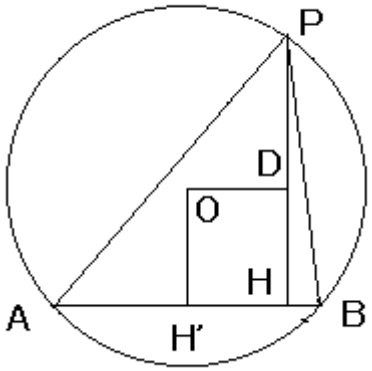
$$PA^2 = \frac{9}{7}\,AB^2 \;\;\Rightarrow\;\; PA = \frac{3}{\sqrt{7}}AB = \;\mathbf{3\sqrt{21}}$$

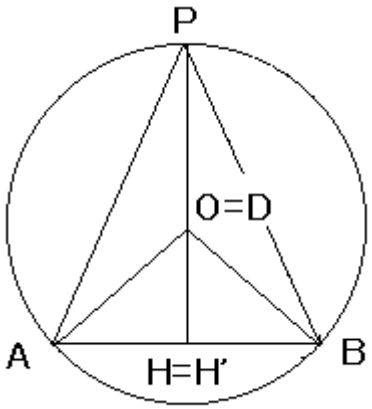
(2) P から AB に下した垂線の足を点 H で表すと ΔABC の面積は $AB \times PH/2 = 7\sqrt{3}/2 \times PH$ と表すことができる。つまり ΔABC の面積が最大となるのは PH の値が最大のときである。



点 P が弧 AB 上にあるとき PH が最大になるのは PH が円 O の中心を通るときである。

（証明）O から PH へ下ろした垂線の足を D、O から PH へ下ろした垂線の足を H' とする（下左図）





このとき、

$$PH = PD + DH = \sqrt{PO^2 - OD^2} + OH'$$

が成り立つ。点 P を動かしたとき $PO,\ OH'$ の長さは変化しないため、PH の長さが最大になるときは OD の長さが最小になるときになる。

線分 OD の長さが最小になるのは、点 D が PH 上にあるとき、つまり PH が円 O の中心を通るときである（上右図）

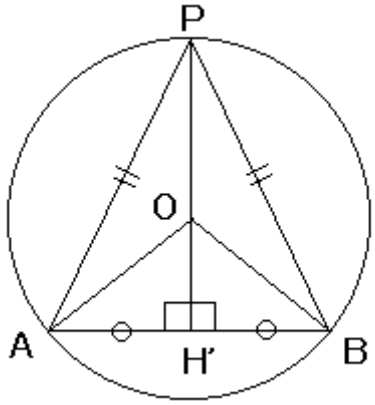
（証明終わり）

PH が円 O の中心を通るとき、点 H' は線分 AB の中点である。

$\Delta APH'$ と$\Delta BPH'$ について

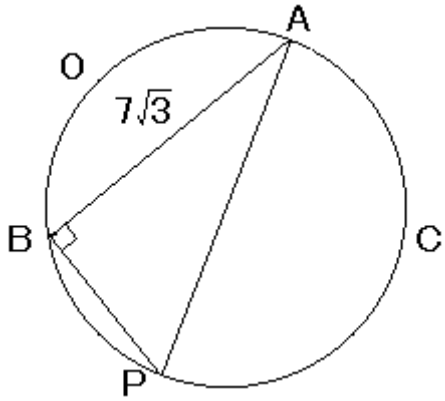
$$AH' = BH', \qquad PH' = PH', \qquad \angle AH'P = \angle BH'P$$

であることから、$\Delta APH' \equiv \Delta BPH'$ つまり $PA = PB$ が成り立つ。



さらに $\angle APB = 60°$ であるため正三角形であることがわかる。よって $PA = AB = \mathbf{7\sqrt{3}}$ である。

(3) 一般的に $-1 \leq \sin\angle PBA \leq 1$ であるため、$\sin\angle PBA$ が最大であるのは $\sin\angle PBA = 1$ のときである。このときは $\angle PBA = 90°$ つまり ΔABP は直角三角形で、外接円 O は AP を直径とする円になる。



よって $PA = \mathbf{14}$ であり、ΔABC の面積は $\angle PAB = 90° - \angle APB = 30°$ より

$$\frac{1}{2}PA \times BA \times \sin\angle PAB = \frac{1}{2} \times 14 \times 7\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{49\sqrt{3}}{2}}$$

である。

［１］の正解

ア	イ	ウエ	オ	カ	キク	ケコ	サ	シ
7	3	21	7	3	14	49	3	2

［2］次の４つの散布図は、2003 年から 2012 年までの 120 か月の東京の月別データをまとめたものである。それぞれ 1 日の最高気温の月平均（以下、平均最高気温）、一日あたり平均降水量、平均湿度、最高気温 25℃以上の日数の割合を横軸にとり、各世帯の 1 日あたりアイスクリーム平均購入額（以下、購入額）を縦軸としてある。

（散布図は省略）

次の ス 、 セ に当てはまるものを、下の ⓪ ～ ④ のうちから一つずつ選べ。ただし、解答の順序は問わない。

これらの散布図から読み取れることとして正しいものは、 **ス** と **セ** である。

⓪　平均最高気温が高くなるほど購入額は増加する傾向がある。
①　１日あたり平均降水量が多くなるほど購入額は増加する傾向がある。
②　平均湿度が高くなるほど購入額の散らばりは小さくなる傾向がある。
③　25℃以上の日数の割合が 50％ 未満の月は、購入額が 30 円を超えていない。
④　この中で正の相関があるのは、平均湿度と購入額の間のみである。

選択肢の内容と散布図を比較して考える。

⓪　「平均最高気温が高くなるほど購入額は増加する傾向」は散布図から読み取ることができる。→ ○
①　「１日あたり平均降水量が多くなるほど購入額は増加する傾向」については、降水量が低い日に購入額が少ないことは多いが、降水量が高い日に購入額が高いことは見られない。→×
②　「平均湿度が高くなるほど購入額の散らばりは小さくなる傾向」については、購入額の散らばりは逆に大きくなる傾向が読み取れる。→×
③　「25℃以上の日数の割合が 50％ 未満の月は、購入額が 30 円を超えていない」については、表から日数の割合が 50％ 未満で、購入額が 30 円を超えている範囲に点が打たれていないため正しい内容である。→ ○
④　この中で正の相関があるのは「平均湿度と購入額の間のみ」ではなく、「平均最高気温と購入額」にも見られる。→×

以上から、次の ス 、 セ に当てはまるものは ⓪ と ③ である。

［1］の正解（順不同）

ス	セ
0	3

［3］世界 4 都市（東京、O 市、N 市、M 市）の 2013 年の 365 日の各日の最高気温のデータについて考える。

(1) 次のヒストグラムは、東京、N 市、M 市のデータをまとめたもので、この 3 都市の箱ひげ図は下の ａ、ｂ、ｃ のいずれかである。

（ヒストグラムと箱ひげ図は省略）

次の ソ に当てはまるものを、下の ⓪ ～ ⑤ のうちから一つ選べ。

都市名と箱ひげ図の組み合わせとして正しいものは **ソ** である。

⓪　東京－ａ、N市－ｂ、M市－ｃ　①　東京－ａ、N市－ｃ、M市－ｂ
②　東京－ｂ、N市－ａ、M市－ｃ　③　東京－ｂ、N市－ｃ、M市－ａ
④　東京－ｃ、N市－ａ、M市－ｂ　⑤　東京－ｃ、N市－ｂ、M市－ａ

(2) 次の 3 つの散布図は、東京、O 市、N 市、M 市の 2013 年の 365 日の各日の最高気温のデータをまとめたものである。それぞれ、O 市、N 市、M 市の最高気温を縦軸にとり、東京の最高気温を横軸にとってある。

（散布図は省略）

次の タ 、 チ に当てはまるものを、下の ⓪ ～ ④ のうちから一つずつ選べ。ただし、解答の順序は問わない。

これらの散布図から読み取れることとして正しいものは、**タ** と **チ** である。

⓪　東京と N 市、東京と M 市の最高気温の間にはそれぞれ正の相関がある。
①　東京と N 市の最高気温の間には正の相関、東京とM市の最高気温の間には負の相関がある。
②　東京と N 市の最高気温の間には負の相関、東京とM市の最高気温の間には正の相関がある。
③　東京とO市の最高気温の間の相関の方が、東京とN市の最高気温の間の相関より強い。
④　東京とO市の最高気温の間の相関の方が、東京とN市の最高気温の間の相関より弱い。

(3) ［ ツ ］、［ テ ］、［ ト ］に当てはまるものを、下の ⓪ ～ ⑨ のうちから一つずつ選べ。ただし、同じものを繰り返し選んでもよい。

N市では温度の単位として摂氏（℃）の他にも華氏（F）も使われている。華氏（F）での温度は、摂氏（℃）での温度を $\frac{9}{5}$ 倍し、32 を加えると得られる。例えば、摂氏 10 ℃では、$\frac{9}{5}$ 倍し 32 を加えることで華氏 50 Fとなる。

したがって、N市の最高気温について、摂氏での分散を X、華氏での分散をYとすると、$\frac{Y}{X}$ は［ ツ ］になる。

東京（摂氏）とN市（摂氏）の共分散を Z、東京（摂氏）とN市（華氏）の共分散を W とすると、$\frac{W}{Z}$ は［ テ ］になる（ただし、共分散は2つの変量のそれぞれの偏差の積の平均値）。

東京（摂氏）とN市（摂氏）の相関係数を U、東京（摂氏）とN市（華氏）の相関係数を V とすると、$\frac{V}{U}$ は［ ト ］になる

⓪ $-\frac{81}{25}$　① $-\frac{9}{5}$　② -1　③ $-\frac{5}{9}$　④ $-\frac{25}{81}$

⑤ $\frac{25}{81}$　⑥ $\frac{5}{9}$　⑦ 1　⑧ $\frac{9}{5}$　⑨ $\frac{81}{25}$

---

［3］ (1) 3都市のヒストグラムの最小値と最大値を調べると、

東京 …… 最小値：0 ～ 5度、最大値：35 ～ 40 度
N市 …… 最小値：－10 ～ －5度、最大値：35 ～ 40 度
M市 …… 最小値：5 ～ 10度、最大値：40 ～ 45 度

となる。一方箱ひげ図の最小値と最大値を調べると。

ａ …… 最小値：5 ～ 10 度、最大値：40 ～ 45 度
ｂ …… 最小値：－10 ～ －5 度、最大値：35 ～ 40 度
ｃ …… 最小値：0 ～ 5 度、最大値：35 ～ 40 度

となる。したがって、都市名と箱ひげ図の組み合わせとして正しいものは ⑤ 東京－ｃ、N市－ｂ、M市－ａ である。

(2) 3 つの散布図はから相関の関係を見ると、東京と O 市、東京とN市には正の相関があり、東京とM市には負の相関がみられる。
また、東京と O 市の散布図は他の 2 つの散布図より点が狭い範囲に散らばっているため、相関が強い。

以上から選択肢の内容を調べてみる。

⓪ 東京と N 市、東京と M 市の最高気温の間にはそれぞれ正の相関がある。……東京と M 市には負の相関がある。→×
① 東京と N 市の最高気温の間には正の相関、東京とM市の最高気温の間には負の相関がある。……内容は正しい。→○
② 東京と N 市の最高気温の間には負の相関、東京とM市の最高気温の間には正の相関がある。……2 つの相関とも正しくない。→×
③ 東京とO市の最高気温の間の相関の方が、東京とN市の最高気温の間の相関より強い。……上で述べた内容から正しい。→○
④ 東京とO市の最高気温の間の相関の方が、東京とN市の最高気温の間の相関より弱い。……東京とO市の相関が強い。→×

よって、これらの散布図から読み取れることとして正しいものは、① と ③ である。

(3) N市の各日の最高気温の摂氏での温度を $t_1, t_2, \cdots, t_{365}$ とし、すべての日の最高気温の平均値の摂氏での温度を t_0 と表す。つまり

$$t_0 = \frac{1}{365}\sum_{k=1}^{365} t_k$$

である。一方、東京での各日の最高気温の摂氏での温度を $s_1, s_2, \cdots, s_{365}$ とし、すべての日の最高気温の平均値の摂氏での温度を s_0 と表す。

摂氏での温度を t ℃ とすると華氏での温度は $\frac{9}{5}t + 32$ F と表される。このことから、N市の最高気温の平均値を華氏で表すと

$$\frac{1}{365}\sum_{k=1}^{365}\left(\frac{9}{5}\ t_k + 32\right) = \frac{9}{5}t_0 + 32$$

となる。

N市の最高気温について、摂氏での分散 X は

$$X = \frac{1}{365}\sum_{k=1}^{365}(t_k - t_0)^2$$

であり、華氏での分散 Y は

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{365}\sum_{k=1}^{365}\left\{\left(\frac{9}{5}\ t_k + 32\right) - \left(\frac{9}{5}\ t_0 + 32\right)\right\}^2 \\ &= \frac{1}{365}\sum_{k=1}^{365}\left(\frac{9}{5}\ t_k - \frac{9}{5}\ t_0\right)^2 \\ &= \frac{1}{365} \times \left(\frac{9}{5}\right)^2 \sum_{k=1}^{365}(\ t_k - \ t_0)^2 \\ &= \frac{81}{25}\ X \end{aligned}$$

となるため、$\dfrac{Y}{X} = \dfrac{\mathbf{81}}{\mathbf{25}}$ になる。

東京（摂氏）とN市（摂氏）の共分散を Z は以下の式で表される。

$$Z = \frac{1}{365}\sum_{k=1}^{365}(s_k - s_0)\,(t_k - t_0)$$

一方、東京（摂氏）とN市（華氏）の共分散を W を計算すると

$$\begin{aligned}
W &= \frac{1}{365}\sum_{k=1}^{365}(s_k - s_0)\left\{\left(\frac{9}{5}\,t_k + 32\right) - \left(\frac{9}{5}\,t_0 + 32\right)\right\} \\
&= \frac{1}{365}\sum_{k=1}^{365}(s_k - s_0)\left(\frac{9}{5}t_k - \frac{9}{5}t_0\right) \\
&= \frac{1}{365} \times \frac{9}{5}\sum_{k=1}^{365}(s_k - s_0)\,(t_k - t_0) \\
&= \frac{9}{5}\,Z
\end{aligned}$$

よって、$\dfrac{W}{Z} = \dfrac{\mathbf{9}}{\mathbf{5}}$ になる。

東京の最高気温について摂氏での分散を X_0 と表すことにする。
東京（摂氏）とN市（摂氏）の相関係数 U の値を X_0, X, Z を使って表すと、

$$U = \frac{\frac{1}{365}\sum_{k=1}^{365}(s_k - s_0)\,(t_k - t_0)}{\left\{\frac{1}{365}\sum_{k=1}^{365}(s_k - s_0)\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{365}\sum_{k=1}^{365}(t_k - t_0)\right\}^{\frac{1}{2}}} = \frac{Z}{\sqrt{X_0}\sqrt{X}}$$

となる。同じく東京（摂氏）とN市（華氏）の相関係数 V の値を X_0, Y, W を使って表すと

$$V = \frac{W}{\sqrt{X_0}\sqrt{Y}}$$

となる。上の結果から、

$$V = \frac{W}{\sqrt{X_0}\sqrt{Y}} = \frac{\frac{9}{5}W}{\sqrt{X_0}\sqrt{\frac{81}{25}X}} = \frac{\frac{9}{5}W}{\frac{9}{5}\sqrt{X_0}\sqrt{X}} = \frac{W}{\sqrt{X_0}\sqrt{X}} = U$$

となるため、$\boldsymbol{\frac{V}{U} = 1}$ になる

［３］の正解（タ　チは順不同）

タ　チ	ツ	テ	ト
1　3	**9**	**8**	**7**