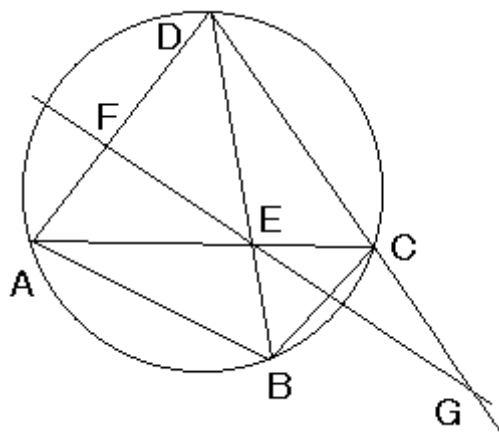


2016 年度センター試験 数学 1・数学 A

第 5 問

四角形 $ABCD$ において、 $AB = 4$, $BC = 2$, $DA = DC$ であり、4 つの頂点 A, B, C, D は同一円周上にある。対角線 AC と対角線 BD の交点を E 、線分 AD を $2:3$ の比に内分する点を F 、直線 FE と直線 DC の交点を G とする。



参考図

次の ア には ① ～ ④ のうちから当てはまるものを一つ選べ。

$\angle ABC$ の大きさが変化すると四角形 $ABCD$ の外接円の大きさも変化することに注意すると、 $\angle ABC$ の大きさがいくらであっても、 $\angle DAC$ と大きさが等しい角は、 $\angle DCA$ と $\angle DBC$ と ア である。

- | | | |
|----------------|----------------|----------------|
| ① $\angle ABD$ | ① $\angle ACB$ | ② $\angle ADB$ |
| ③ $\angle BCG$ | ④ $\angle BEG$ | |

このことより $\frac{EC}{AE} = \frac{\text{イ}}{\text{ウ}}$ である。次に $\triangle ACD$ と直線 FE に着目すると、

$$\frac{GC}{DG} = \frac{\text{エ}}{\text{オ}}$$

である。

(1) 直線 AB が点 G を通る場合について考える。

このとき、 $\triangle AGD$ の辺 AG 上に点 B があるので、 $BG = \boxed{\text{カ}}$ である。

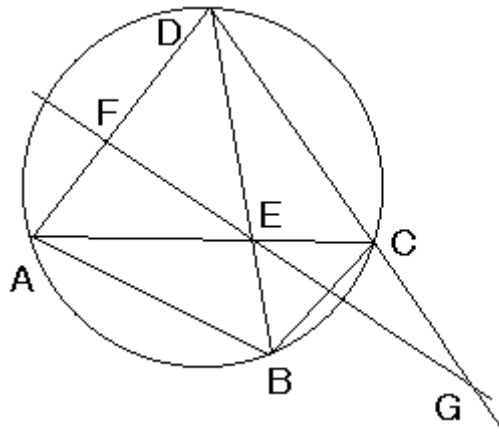
また、直線 AB と直線 DC が点 G で交わり、4 点 A, B, C, D は同一円周上にあるので、 $DC = \boxed{\text{キ}} \sqrt{\boxed{\text{ク}}}$ である。

(2) 四角形 $ABCD$ の外接円の直径が最小となる場合について考える。

このとき、四角形 $ABCD$ の外接円の直径は $\boxed{\text{ケ}}$ であり、 $\angle BAC = \boxed{\text{コサ}}^\circ$ である。

また、直線 FE と直線 AB の交点を H とするとき、 $\frac{GC}{DG} = \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ の関係

に着目して AH を求めると、 $AH = \boxed{\text{シ}}$ である。



$\triangle DAC$ は $DA = DC$ より二等辺三角形であるため、 $\angle DAC = \angle DCA$ が成り立つ。また、円周角の定理より

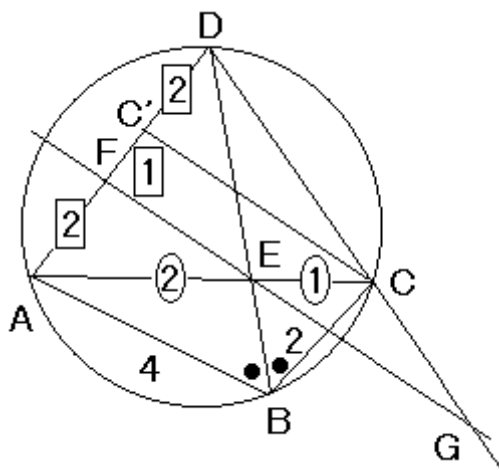
$$\angle DAC = \angle DBC, \quad \angle DCA = \angle ABD$$

となるため、 $\angle DAC$ は ⑩ $\angle ABD$ と同じ大きさが等しい。

である。

$$AE : EC = AB : BC = 2 : 1 \Rightarrow \frac{EC}{AE} = \frac{1}{2}$$

である。



(上の図で、丸や四角で囲まれた数字は長さの比を表す。囲まれていない数字は実際の長さを表す。以降の図でも同様)

次に、直線 FE に平行で点 C を通る直線と線分 AD との交点を C' とする。

このとき

$$AF : FC' = AE : EC = 2 : 1 \Rightarrow DF : AF : FC' = 3 : 2 : 1$$

となるため、

$$GC : DG = FC' : DF = 1 : 3 \Rightarrow \frac{GC}{DG} = \frac{1}{3}$$

である。

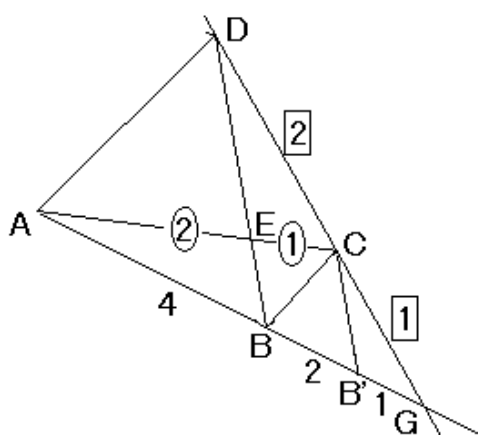
(1) 直線 AB が点 G を通る場合について考える。

このとき、 $\triangle AGD$ の辺 AG 上に点 B がある。線分 DB に平行で点 C を通る直線と線分 AG との交点を B' とする。このとき

$$AB : BB' = AE : EC = 2 : 1 \Rightarrow BB' = AB \times \frac{1}{2} = 2$$

$$BB' : B'G = DC : CG = 2 : 1 \Rightarrow B'G = BB' \times \frac{1}{2} = 1$$

となるので、 $BG = BB' + B'G = 3$ である。



また、直線 AB と直線 DC が点 G で交わり、4 点 A, B, C, D は同一円周上にあるので、 $\angle GAD = \angle GCB$, $\angle GDA = \angle GBC$ 、つまり $\triangle GAD$ と $\triangle GCB$ は相似である。したがって、

$$GB : GD = GC : GA \Rightarrow GD \cdot GC = GA \cdot GB = 21$$

が成り立つ。ここで $GD = \frac{3}{2}DC$, $GC = \frac{1}{2}DC$ を代入すると

$$GD \cdot GC = \frac{3}{4}DC^2 = 21 \Rightarrow DC = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

である。

(2) 四角形 $ABCD$ の外接円の直径が最小となる場合について考える。 $AB = 4$ であるため、外接円の直径は 4 以上でなければならない。外接円の直径が 4 であるような四角形 $ABCD$ も作図できるため、直径が最小となる場合、直径は 4 である。このとき、 $\triangle ABC$ は $\angle C = 90^\circ$ の直角三角形であり、また $AB = 4$, $BC = 2$ であることから $\angle BAC = 30^\circ$ である。

