2016年度センター試験　数学2

第1問

[1]

(1) $8^{\frac{5}{6}} = \boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}, \log_{27}\dfrac{1}{9} = \dfrac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である。

(2) $y = 2^x$ のグラフと $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ のグラフは $\boxed{\text{カ}}$ である。

$y = 2^x$ のグラフと $y = \log_2 x$ のグラフは $\boxed{\text{キ}}$ である。

$y = \log_2 x$ のグラフと $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ のグラフは $\boxed{\text{ク}}$ である。

$y = \log_2 x$ のグラフと $y = \log_2 \dfrac{1}{x}$ のグラフは $\boxed{\text{ケ}}$ である。

$\boxed{\text{カ}}$ ～ $\boxed{\text{ケ}}$ に当てはまるものを、次の ⓪ ～ ③ のうちから一つずつ選べ。ただし、同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪　同一のもの　　①　x 軸に関して対称
②　y 軸に関して対称　　③　直線 $y = x$ に関して対称

(3) $x > 0$ の範囲における関数 $y = \left(\log_2 \dfrac{x}{4}\right)^2 - 4\log_4 x + 3$ の最小値を求めよう。

$t = \log_2 x$ とおく。このとき $y = t^2 - \boxed{\text{コ}}\,t + \boxed{\text{サ}}$ である。また、x が $x > 0$ の範囲を動くとき、t のとり得る値の範囲は $\boxed{\text{シ}}$ である。$\boxed{\text{シ}}$ に当てはまるものを、次の ⓪ ～ ③ のうちから一つ選べ。

⓪　$t > 0$　　①　$t > 1$
②　$t > 0$ かつ $t \neq 1$　　③　実数全体

したがって、y は $t=$ $\boxed{\text{ス}}$ のとき、すなわち $x=$ $\boxed{\text{セ}}$ のとき、最小値 $\boxed{\text{ソタ}}$ をとる。

---

(1) $8=2^3$ であることから、

$$8^{\frac{5}{6}}=(2^3)^{\frac{5}{6}}=2^{\frac{5}{2}}=2^2\times 2^{\frac{1}{2}}=\mathbf{4\sqrt{2}}$$

となる。また、底の変換法則を使うと

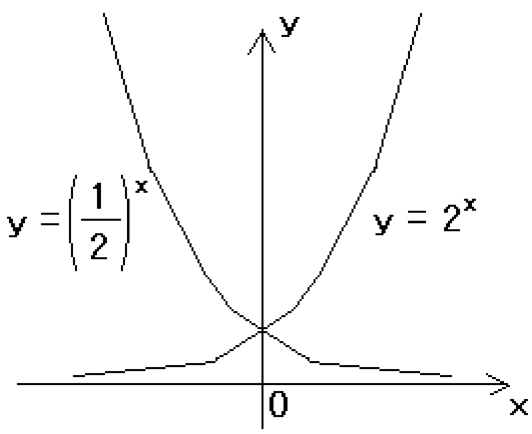
$$\log_{27}\frac{1}{9}=\frac{\log_3\frac{1}{9}}{\log_3 27}=\frac{-\log_3 9}{3}=\mathbf{\frac{-2}{3}}$$

となる。

(2)

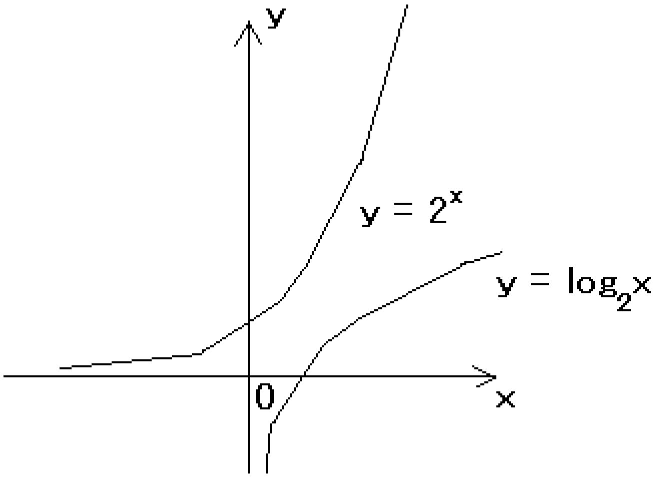
$$\left(\frac{1}{2}\right)^x=(2^{-1})^x=2^{-x}$$

であることから、$y=2^x$ のグラフと $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ のグラフは $\boldsymbol{y}$ **軸に関して対称**である。



$y=2^x$ と $y=\log_2 x$ は逆関数の関係にあるため、$y=2^x$ のグラフと

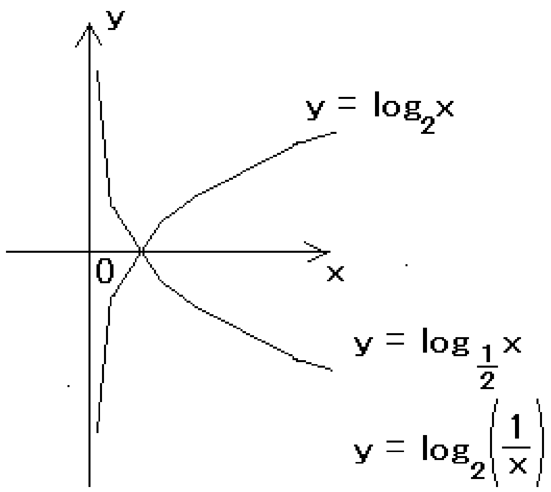
$y=\log_2 x$ のグラフは**直線** $\boldsymbol{y=x}$ **に関して対称**である。



$$\log_{\frac{1}{2}} x=\frac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{2}}=-\log_2 x$$

$$\log_2 \frac{1}{x}=-\log_2 x$$

より $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ と $y=\log_2 \frac{1}{x}$ は同じグラフになる。よって、$y=\log_2 x$ のグラフと $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ のグラフは $\boldsymbol{x}$ **軸に関して対称**であり、$y=\log_2 x$ のグラフと $y=\log_2 \frac{1}{x}$ のグラフも $\boldsymbol{x}$ **軸に関して対称**である。



(3) $x>0$ の範囲における関数 $y=\left(\log_2\dfrac{x}{4}\right)^2-4\log_4 x+3$ の最小値を求めよう。

　$t=\log_2 x$ とおく。

$$\log_2\frac{x}{4}=\log_2 x-\log_2 4=t-2$$
$$\log_4 x=\frac{\log_2 x}{\log_2 4}=\frac{t}{2}$$

となることから

$$y=(t-2)^2-4\times\frac{t}{2}+3=t^2-\mathbf{6}\,t+\mathbf{7}$$

である。

x が $x>0$ の範囲を動くとき、$t=\log_2 x$ のとり得る値の範囲は**実数全体**である。

　$y=(t-3)^2-2$ より関数 y は $t<3$ の範囲では減少し、$t>3$ の範囲では増加する。

　したがって、y は $t=\mathbf{3}$ のとき、すなわち $x=2^3=\mathbf{8}$ のとき、最小値 $\mathbf{-2}$ をとる。

［１］の正解

ア	イ	ウエ	オ	カ	キ	ク	ケ
4	2	−2	3	2	3	1	1
コ	サ	シ	ス	セ	ソタ		
6	7	3	3	8	−2		

［２］ k を正の定数として

$$\cos^2 x - \sin^2 x + k\left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}\right) = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

を満たす x について考える。

(1) $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で ① を満たす x の個数について考えよう。

① の両辺に $\sin^2 x\ \cos^2 x$ をかけ、２倍角の公式を用いて変形すると

$$\left(\frac{\sin^2 2x}{\boxed{\text{チ}}} - k\right)\cos 2x = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$

を得る。したがって、k の値に関係なく、$x = \dfrac{\pi}{\boxed{\text{ツ}}}$ のときはつねに ① が成り立つ。また、$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で $0 < \sin^2 2x \leq 1$ であるから、$k > \dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ のとき、① を満たす x は $x = \dfrac{\pi}{\boxed{\text{ツ}}}$ のみである。一方、$0 < k < \dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ のとき、① を満たす x の個数は $\boxed{\text{ナ}}$ 個である、$k = \dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ のときは $\boxed{\text{ニ}}$ 個である。

(2) $k = \dfrac{4}{25}$ とし、$\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で ① を満たす x について考えよう。

② により $\cos 2x = \dfrac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ であるから

$$\cos 2x = \frac{\boxed{ノハ}}{\boxed{ヒ}}$$

である。したがって

$$\cos x = \frac{\sqrt{\boxed{フ}}}{\boxed{ヘ}}$$

である。

$$\cos^2 x - \sin^2 x + k\left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}\right) = 0 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

を満たす x について考える。

(1) ２倍角の公式より

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x \ \sin^2 x} = \frac{-\cos 2x}{\cos^2 x \ \sin^2 x}$$

が成り立つ。このことから、① の両辺に $\sin^2 x \ \cos^2 x$ をかけ変形すると

$$\cos 2x \times \sin^2 x \ \cos^2 x + k(-\cos 2x) = 0$$

$$\Rightarrow \cos 2x \times \frac{1}{4}\sin^2 2x - k\cos 2x = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sin^2 2x}{\mathbf{4}} - k\right)\cos 2x = 0 \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

を得る。したがって、① が成り立つとき、

$$\frac{\sin^2 2x}{4} - k = 0 \quad \text{or} \quad \cos 2x = 0$$

が成り立つ。$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で $\cos 2x = 0$ を満たす x は $x = \dfrac{\pi}{\mathbf{4}}$ である。この値は k の値に関係なく、つねに ① が成り立つ。

また、

$$\frac{\sin^2 2x}{4} - k = 0 \Rightarrow \sin^2 2x = 4k$$

が成り立つ。$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で $0 < \sin 2x \leq 1$ であることから、

$$\sin 2x = 2\sqrt{k}$$

が成り立つ。① を満たす x の個数を k の値で場合分けをして求める。

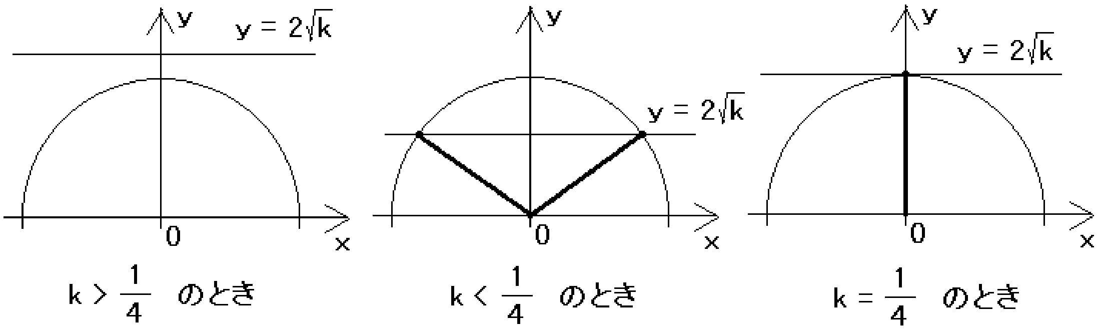
$k > \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$ のとき、$4k > 1$ より $\sin 2x = 2\sqrt{k}$ を満たす x は存在しない。よって ① を満たす x は $x = \dfrac{\pi}{4}$ のみである。

$0 < k < \dfrac{1}{4}$ のとき、$0 < 4k < 1$ より $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で $\sin 2x = 2\sqrt{k}$ を満たす x は２個存在する。よって ① を満たす x は $x = \dfrac{\pi}{4}$ と合わせて **3** 個である。

$k = \dfrac{1}{4}$ のとき、$4k = 1$ より $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で

$$\sin 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

となるため、① を満たす x は $x = \dfrac{\pi}{4}$ のみの **1** 個である。



(2) $k=\dfrac{4}{25}$ とし、$\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で ① を満たす x について考えよう。

範囲から、$\sin 2x>0$ であるため、② により

$$\sin^2 2x=4\times\frac{4}{25}=\frac{16}{25}\Rightarrow\sin 2x=\sqrt{\frac{16}{25}}=\boldsymbol{\frac{4}{5}}$$

である。また $\cos 2x<0$ であることから

$$\cos 2x=-\sqrt{1-\sin^2 2x}=\boldsymbol{\frac{-3}{5}}$$

である。したがって $\cos 2x=2\cos^2 x-1$ より

$$\cos^2 x=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{3}{5}+1\right)=\frac{1}{5}$$

$\cos x>0$ より

$$\cos x=\sqrt{\frac{1}{5}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{5}}{5}}$$

である。

［２］の正解

チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ
4	**4**	**1**	**4**	**3**	**1**
ヌ	ネ	ノハ	ヒ	フ	ヘ
4	**5**	**−3**	**5**	**5**	**5**