2016年度センター試験　数学2

第2問

座標平面上で、放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}$ を C_1 とし、放物線 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ を C_2 とする。

(1) 実数 a に対して、2 直線 $x=a$ と $x=a+1$ で囲まれた図形 D の面積 S は

$$S=\int_a^{a+1}\left(\frac{1}{\boxed{\text{ア}}}x^2+\frac{1}{\boxed{\text{イ}}}\right)dx$$

$$=\frac{a^2}{\boxed{\text{ウ}}}+\frac{a}{\boxed{\text{エ}}}+\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カキ}}}$$

である。S は $a=\dfrac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ で最小値 $\dfrac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{スセ}}}$ をとる。

(2) 4 点 $(a,\ 0)$, $(a+1,\ 0)$, $(a+1,1)$, $(a,1)$ を頂点とする正方形を R で表す。a が $a\geq 0$ の範囲を動くとき、正方形 R と (1) の図形 D の共通部分の面積を T とおく。T が最大となる a の値を求めよう。

直線 $y=1$ は、C_1 と $(\pm\boxed{\text{ソ}},1)$ で、C_2 と $(\pm\boxed{\text{タ}},1)$ で交わる。したがって、正方形 R と図形 D の共通部分が空集合にならないのは $0\leq a\leq\boxed{\text{チ}}$ のときである。

$\boxed{\text{ソ}}\leq a\leq\boxed{\text{チ}}$ のとき、正方形 R は放物線 C_1 と x 軸の間にあり、この範囲で a が増加するとき、T は $\boxed{\text{ツ}}$。$\boxed{\text{ツ}}$ に当てはまるものを、次の ⓪ ～ ② のうちから一つ選べ。

⓪　増加する　　① 減少する　　② 変化しない。

　したがって、T が最大になる a の値は、$0 \leq a \leq \boxed{\text{ソ}}$ の範囲にある。

$0 \leq a \leq \boxed{\text{ソ}}$ のとき、(1) の図形 D のうち、正方形 R の外側にある部分の面積 U は

$$U = \frac{a^3}{\boxed{\text{テ}}} + \frac{a^2}{\boxed{\text{ト}}}$$

である。よって $0 \leq a \leq \boxed{\text{ソ}}$ において

$$T = -\frac{a^3}{\boxed{\text{ナ}}} - \frac{a^2}{\boxed{\text{ニ}}} + \frac{a^2}{\boxed{\text{ヌ}}} + \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カキ}}}$$

である。① の右辺の増減を調べることにより、T は

$$a = \frac{\boxed{\text{ネノ}} + \sqrt{\boxed{\text{ハ}}}}{\boxed{\text{ヒ}}}$$

で最大値をとることがわかる。

---

(1) すべての実数 x に対して

$$\frac{1}{4}x^2 \leq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$$

であることから、図形 D の面積 S を求めると

$$S=\int_a^{a+1}\left\{\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}x^2\right\}dx$$

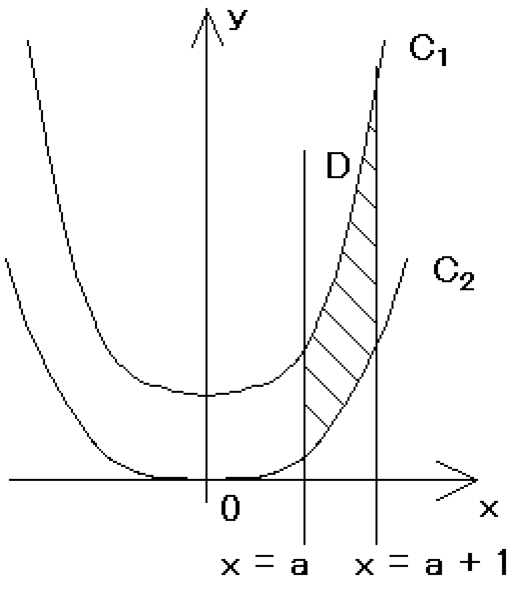
$$=\int_a^{a+1}\left(\frac{1}{\mathbf{4}}x^2+\frac{1}{\mathbf{2}}\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{2}x\right]_a^{a+1}$$

$$=\left\{\frac{1}{12}(a+1)^3+\frac{1}{2}(a+1)\right\}-\left(\frac{1}{12}a^3+\frac{1}{2}a\right)$$

$$=\frac{a^2}{\mathbf{4}}+\frac{a}{\mathbf{4}}+\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{12}}$$

である。



この式を変形すると

$$S=\frac{1}{4}\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{25}{48}$$

となることから、S は $a=\boldsymbol{\frac{-1}{2}}$ で最小値 $\boldsymbol{\frac{25}{48}}$ をとる。

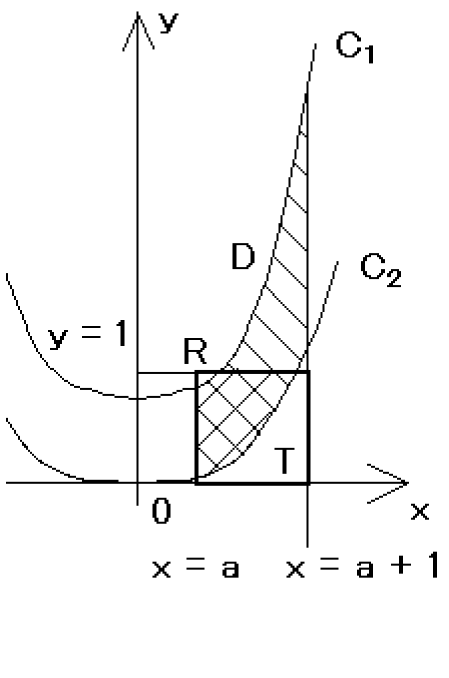
⑵ 4 点 $(a,\ 0)$, $(a+1,\ 0)$, $(a+1, 1)$, $(a, 1)$ を頂点とする正方形を R で表す。

$$\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}=1 \Rightarrow x=\pm 1, \qquad \frac{1}{4}x^2=1 \Rightarrow x=\pm 2$$

であることから、直線 $y=1$ は、C_1 と $(\pm\mathbf{1}\ , 1)$ で、C_2 と $(\pm\mathbf{2}\ , 1)$ で交わる。$0 \leq a$ の範囲では、C_1, C_2 はともに増加関数のグラフとなるため、正方形 R と図形 D の共通部分が空集合にならないのは $0 \leq a \leq \mathbf{2}$のときである。

$1 \leq a \leq 2$ のとき、正方形 R は放物線 C_1 と x 軸の間にあり、この範囲で a が増加するとき、正方形 R は⑴ の図形 D から離れるように移動するため、正方形 R と ⑴ の図形 D の共通部分の面積 T は**減少する**。

したがって、T が最大になる a の値は、$0 \leq a \leq 2$ の範囲にある。



$0 \leq a \leq 2$ のとき、⑴ の図形 D のうち、正方形 R の外側にある部分は２直線 $x=a+1$, $y=1$ と C_1 に囲まれた部分になる。よってこの部分の面積

U は

$$U = \int_1^{a+1} \left\{ \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \right) - 1 \right\} dx$$

$$= \int_1^{a+1} \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x \right]_1^{a+1}$$

$$= \left\{ \frac{1}{6}(a+1)^3 - \frac{1}{2}(a+1) \right\} - \left(-\frac{1}{3} \right)$$

$$= \frac{a^3}{\mathbf{6}} + \frac{a^2}{\mathbf{2}}$$

である。よって $0 \leq a \leq 1$ において

$$T = S - U$$

$$= \left(\frac{a^2}{4} + \frac{a}{4} + \frac{7}{12} \right) - \left(\frac{a^3}{6} + \frac{a^2}{2} \right)$$

$$= -\frac{a^3}{\mathbf{6}} - \frac{a^2}{\mathbf{4}} + \frac{a}{\mathbf{4}} + \frac{7}{12} \qquad \cdots ①$$

である。① の右辺の増減を調べる。まず T を a で微分すると、

$$\frac{dT}{da} = -\frac{a^2}{2} - \frac{a}{2} + \frac{1}{4}$$

となるため、

$$\frac{dT}{da} = -\frac{a^2}{2} - \frac{a}{2} + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow 2a^2 + 2a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

$0 \leq a \leq 1$ の範囲での T の増減は以下の通りになる。

a	0		$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$		1
dT/da	$+$	$+$	0	$-$	$-$
T	増加	増加		減少	減少

以上から T は

$$a = \frac{\mathbf{-1+\sqrt{3}}}{\mathbf{2}}$$

で最大値をとることがわかる。

第 2 問の正解

ア	イ	ウ	エ	オ	カキ	クケ	コ	サシ	スセ		
4	**2**	**4**	**4**	**7**	**12**	**−1**	**2**	**25**	**48**		
ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ	ネノ	ハ	ヒ
1	**2**	**2**	**1**	**6**	**2**	**6**	**4**	**4**	**−1**	**3**	**2**