2016 年度センター試験　数学 2

第 3 問

座標平面上に４点 $A(-1,\ 0)$, $B(1,\ 0)$, $P(-1,\ 3)$, $Q(1,\ 1)$ がある。線分 PQ 上に点 R をとり、その x 座標を a とする。さらに、三角形 ABR の外接円を C とし、その中心を S とする。

(1) 点 R の座標を a を用いて表すと、

$$\left(a,\ \boxed{\text{アイ}}+\boxed{\text{ウ}}\right)$$

である。

また、線分 AR の中点を M とする。M の座標を a を用いて表すと

$$\left(\frac{\boxed{\text{エ}}-\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}},\quad \frac{\boxed{\text{キク}}+\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\right)$$

である。

(2) 外接円 C の中心 S は、線分 AB の垂直二等分線と、線分 AR の垂直二等分線 ℓ との交点である。このことを用いて S の座標を求めよう。

線分 AB の垂直二等分線は y 軸である。また、ℓ は (1) の点 M を通り、

傾き $\dfrac{a+\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}-\boxed{\text{ス}}}$ の直線である。

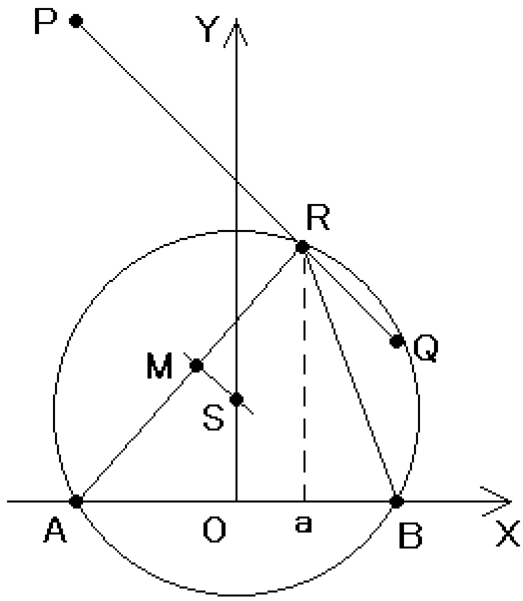
以上のことから、S の座標は

$$\left(\boxed{\text{セ}},\ \frac{\boxed{\text{ソタ}}\,a^2+\boxed{\text{チ}}\,a-\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}\,a-\boxed{\text{ト}}}\right)$$

であることがわかる。

(3) 円 C が点 R で直線 PQ に接するときの a の値を求めよう。

C が直線 PQ に接するとき、直線 RS の傾きは $\boxed{ナ}$ である。このことと、$-1 \leq a \leq 1$ であることから、$a = \dfrac{\boxed{ニ} - \sqrt{\boxed{ヌ}}}{\boxed{ネ}}$ である。



(1) 線分 PQ の方程式は

$$y - 1 = \frac{1-3}{1-(-1)}(x-1) \ \Rightarrow \ y = -x + 2$$

である。よって点 R の座標は

$$(a, -\boldsymbol{a} + \boldsymbol{2})$$

である。

また、線分 AR の中点を M とする。M の座標を a を用いて表すと

$$\left(\frac{1}{2}(-1+a),\qquad \frac{1}{2}\{0+(-a+2)\}\right)=\left(\boldsymbol{\frac{a-1}{2}},\boldsymbol{\frac{-a+2}{2}}\right)$$

である。

(2) 外接円 C の中心 S の座標を求めよう。線分 AB の垂直二等分線は y 軸である。線分 AR の傾きは

$$\frac{(-a+2)-0}{a-(-1)}=\frac{-a+2}{a+1}$$

であることから、線分 AR の垂直二等分線 ℓ は (1) の点 M を通り、傾き

$$-1\times\frac{a+1}{-a+2}=\boldsymbol{\frac{a+1}{a-2}}$$

の直線である。つまり ℓ の方程式は

$$y-\frac{-a+2}{2}=\frac{a+1}{a-2}\left(x-\left(\frac{a-1}{2}\right)\right)$$

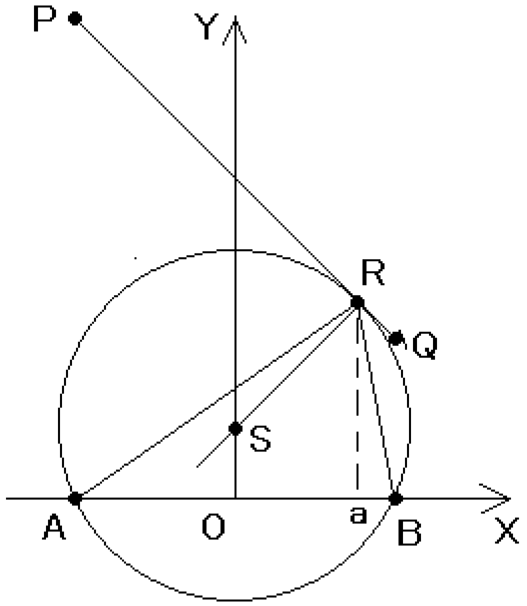
となる。点 S は、この直線 ℓ と線分 AB の垂直二等分線は y 軸との交点であるため、S の y 座標は

$$\frac{a+1}{a-2}\left(0-\left(\frac{a-1}{2}\right)\right)+\frac{-a+2}{2}$$
$$=\frac{-a^2+1}{2a-4}+\frac{-a+2}{2}$$
$$=\frac{-2a^2+4a-3}{2a-4}$$

である。以上のことから、S の座標は

$$\left(\mathbf{0},\quad \frac{\mathbf{-2\,}\boldsymbol{a}^{2}\mathbf{+4\,}\boldsymbol{a}\mathbf{-3}}{\mathbf{2\,}\boldsymbol{a}\mathbf{-4}}\right)$$

であることがわかる。
(3) 円 C が点 R で直線 PQ に接するときの a の値を求めよう。



直線 PQ の傾きは -1 である。C が直線 PQ に接するとき、直線 RS は円 PQ の半径であるため、直線 RS の傾きは $-1/-1 = \mathbf{1}$ である。よって直線 RS の方程式は

$$y-(-a+2)=x-a \;\Rightarrow\; y=x-2\,a+2$$

となる。このことから、点 S の y 座標は $-2\,a+2$ となる。(2) の結果より、

$$\frac{-2\,a^{2}+4\,a-3}{2\,a-4}=\;-2\,a+2$$
$$\Rightarrow 2\,a^{2}-8\,a+5=0$$
$$\Rightarrow a=\frac{4\pm\sqrt{6}}{2}$$

このことと、$-1 \leq a \leq 1$　であることから、$a = \dfrac{\mathbf{4-\sqrt{6}}}{\mathbf{2}}$　である。

第３問の正解

アイ	ウ	エ	オ	カキ	クケ	コ		
$-a$	**2**	a	**1**	**2**	$-a$	**2**		
サ	シ	ス	セ	ソタ	チ	ツ	テ	ト
1	a	**2**	**0**	**−2**	**4**	**3**	**2**	**4**
ナ	ニ	ヌ	ネ					
1	**4**	**6**	**2**					