2016 年度センター試験　数学 2

第 4 問

(1) 4 次方程式 $x^4+2\,x^2+25=0$ の解を求めよう。
　$t=x^2$ とおいて得られる 2 次方程式 $t^2+2\,t+25=0$ の判別式を D とするとき

$$D=\boxed{\text{アイウ}}$$

であり、2 次方程式の解は

$$t=\boxed{\text{エオ}}\pm\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}\,i$$

である。2 乗すると虚数 t になる複素数を求める代わりに、以下のように考える。
　上の 4 次方程式を、正の実数 $A,\ B$ により $(x^2+A)^2-B\,x^2=0$ と変形すると。

$$A=\boxed{\text{ク}}\ ,\qquad B=\boxed{\text{ケ}}$$

である。
　したがって、等式

$$(x^2+A)^2-B\,x^2=\left(x^2+\sqrt{B}\,x+A\right)(x^2-\sqrt{B}\,x+A)$$

を利用すると、4 次方程式 $x^4+2\,x^2+25=0$ の解は

$$x=-\sqrt{\boxed{\text{コ}}}\pm\sqrt{\boxed{\text{サ}}}\,i\,,\ \sqrt{\boxed{\text{コ}}}\pm\sqrt{\boxed{\text{サ}}}\,i$$

であることがわかる。

(2) $q,\ r$ を実数として、整式 $P(x)=x^3-2\,x^2+q\,x+2\,r$ を考える。3 次方程式 $P(x)=0$ の解が -2 と二つの自然数 $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ であるとき、$\alpha,\ \beta$ と $q,\ r$ を求めよう。

$P(-2)=0$ であるから、$r=q+\boxed{\textbf{シ}}$ である。したがって因数定理により

$$P(x)=(x+2)\,(x^2-\boxed{\textbf{ス}}\,x+q+\boxed{\textbf{セ}})$$

となる。

ここで、2 次方程式

$$x^2-\boxed{\text{ス}}\,x+q+\boxed{\text{セ}}=0$$

は二つの自然数 $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ を解に持つことから

$$\alpha=\boxed{\textbf{ソ}}\,,\qquad \beta=\boxed{\textbf{タ}}\,,\qquad q=\boxed{\textbf{チツ}}\,,\qquad r=\boxed{\textbf{テ}}$$

である。

---

(1) $t=x^2$ とおいて得られる 2 次方程式 $t^2+2\,t+25=0$ の判別式を D の値は

$$D=2^2-4\times1\times25=\mathbf{-96}$$

であり、2 次方程式の解は

$$t=\frac{-2\pm\sqrt{-96}}{2\times1}=\frac{-2\pm4\sqrt{6}\,i}{2}=\mathbf{-1}\ \pm\ \mathbf{2\sqrt{6}}\,i$$

である。2 乗すると虚数 t になる複素数を求める代わりに、以下のように考え

る。

上の 4 次方程式を、正の実数 $A,\ B$ により $(x^2+A)^2-B\,x^2=0$ と変形することを考える。

$$(x^2+A)^2-B\,x^2=x^4+(2\,A-B)\,x^2+A^2$$

より $A,\ B$ の値を求めると

$$\begin{cases}2\,A-B=2\\ A^2=25\end{cases}\Rightarrow A=\mathbf{5},\qquad B=\mathbf{8}$$

である。

したがって、等式

$$(x^2+A)^2-B\,x^2=\left(x^2+\sqrt{B}\,x+A\right)(x^2-\sqrt{B}\,x+A)$$

を利用すると、4 次方程式 $x^4+2\,x^2+25=0$ の解は

$$x^2+2\sqrt{2}\,x+5=0,\qquad x^2-2\sqrt{2}\,x+5=0,$$

の解である。$x^2+2\sqrt{2}\,x+5=0$ の解は

$$x=\frac{-2\sqrt{2}\pm\sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2-4\times1\times5}}{2\times1}=\frac{-2\sqrt{2}\pm\sqrt{-12}}{2}=-\sqrt{\mathbf{2}}\pm\sqrt{\mathbf{3}}\,i$$

であり、同様にして $x^2-2\sqrt{2}\,x+5=0$ の解は

$$x=\sqrt{2}\ \pm\sqrt{3}\,i$$

であることがわかる。

(2) $q,\ r$ を実数として、整式 $P(x)=x^3-2\,x^2+q\,x+2\,r$ を考える。3 次方程式 $P(x)=0$ の解が -2 と二つの自然数 $\alpha,\ \beta$ $(\alpha<\beta)$ であるとき、$\alpha,\ \beta$ と $q,\ r$ を求めよう。

　$P(-2)=0$ であるから、

$$(-2)^3-2\times(-2)^2+q\times(-2)+2\,r=-2\,q+2\,r-16=0$$

よって、$r=q+\mathbf{8}$　である。したがって因数定理により

$$\begin{aligned}P(x)&=x^3-2\,x^2+q\,x+2\,(q+8)\\&=(x+2)\,(x^2-\mathbf{4}\,x+q+\mathbf{8})\end{aligned}$$

となる。

　ここで、2 次方程式

$$x^2-\ 4\,x+q+8\ =0$$

は二つの自然数 $\alpha,\ \beta$ $(\alpha<\beta)$ を解に持つことから、解と係数の関係より $\alpha+\beta=4$ が成り立つ。$\alpha,\ \beta$ は異なる自然数であるため、$\alpha=\mathbf{1},\ \beta=\mathbf{3}$ である。このことから、

$$q+8=\alpha\,\beta=3\Rightarrow\ q=-\,\mathbf{5}$$

よって、$r=q+8=-\,5+8=\mathbf{3}$ となる。

第 4 問の正解

アイウ	エオ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ
−96	**−1**	**2**	**6**	**5**	**8**	**2**	**3**
シ	ス	セ	ソ	タ	チツ	テ	
8	**4**	**8**	**1**	**3**	**−5**	**3**	