

2016年度センター試験 数学2B

第1問

[1]

(1) $8^{\frac{5}{6}} = \boxed{\text{ア}} \sqrt{\boxed{\text{イ}}}$, $\log_{27} \frac{1}{9} = \frac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である。

(2) $y = 2^x$ のグラフと $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ のグラフは $\boxed{\text{カ}}$ である。

$y = 2^x$ のグラフと $y = \log_2 x$ のグラフは $\boxed{\text{キ}}$ である。

$y = \log_2 x$ のグラフと $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ のグラフは $\boxed{\text{ク}}$ である。

$y = \log_2 x$ のグラフと $y = \log_2 \frac{1}{x}$ のグラフは $\boxed{\text{ケ}}$ である。

$\boxed{\text{カ}} \sim \boxed{\text{ケ}}$ に当てはまるものを、次の ① ~ ③ のうちから一つずつ選べ。ただし、同じものを繰り返し選んでもよい。

- ① 同一のもの ① x 軸に関して対称
② y 軸に関して対称 ③ 直線 $y = x$ に関して対称

(3) $x > 0$ の範囲における関数 $y = \left(\log_2 \frac{x}{4}\right)^2 - 4 \log_4 x + 3$ の最小値を求めよう。

$t = \log_2 x$ とおく。このとき $y = t^2 - \boxed{\text{コ}} t + \boxed{\text{サ}}$ である。また、 x が $x > 0$ の範囲を動くとき、 t のとり得る値の範囲は $\boxed{\text{シ}}$ である。 $\boxed{\text{シ}}$ に当てはまるものを、次の ① ~ ③ のうちから一つ選べ。

- ① $t > 0$ ① $t > 1$
② $t > 0$ かつ $t \neq 1$ ③ 実数全体

したがって、 y は $t = \boxed{\text{ス}}$ のとき、すなわち $x = \boxed{\text{セ}}$ のとき、最小値 $\boxed{\text{ソタ}}$ をとる。

(1) $8 = 2^3$ であることから、

$$8^{\frac{5}{6}} = (2^3)^{\frac{5}{6}} = 2^{\frac{5}{2}} = 2^4 \times 2^{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{2}$$

となる。また、底の変換法則を使うと

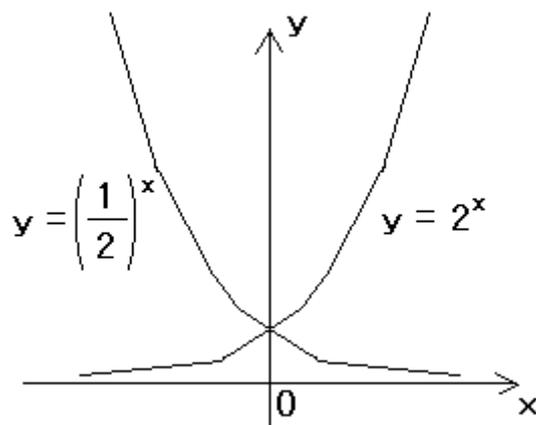
$$\log_{27} \frac{1}{9} = \frac{\log_3 \frac{1}{9}}{\log_3 27} = \frac{-\log_3 9}{3} = \frac{-2}{3}$$

となる。

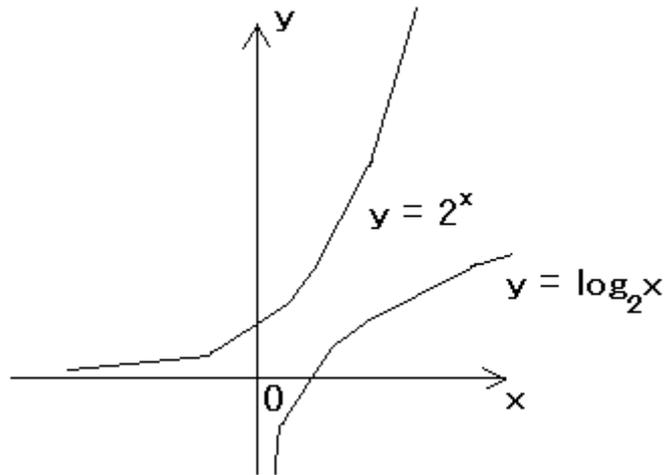
(2)

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = (2^{-1})^x = 2^{-x}$$

であることから、 $y = 2^x$ のグラフと $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ のグラフは y 軸に関して対称である。



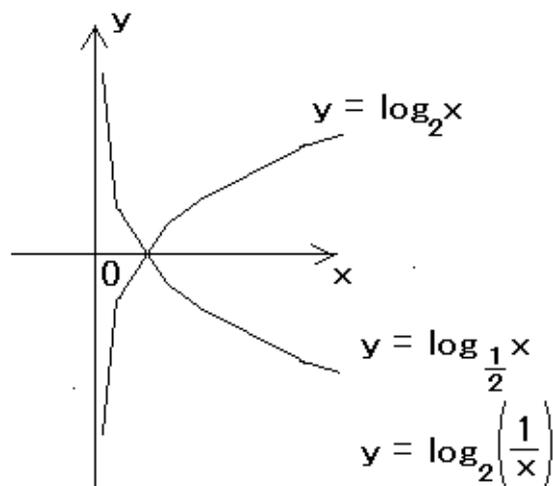
$y = 2^x$ と $y = \log_2 x$ は逆関数の関係にあるため、 $y = 2^x$ のグラフと $y = \log_2 x$ のグラフは直線 $y = x$ に関して対称である。



$$\log_{\frac{1}{2}} x = \frac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{2}} = -\log_2 x$$

$$\log_2 \frac{1}{x} = -\log_2 x$$

より $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ と $y = \log_2 \frac{1}{x}$ は同じグラフになる。よって、 $y = \log_2 x$ のグラフと $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ のグラフは x 軸に関して対称であり、 $y = \log_2 x$ のグラフと $y = \log_2 \frac{1}{x}$ のグラフも x 軸に関して対称である。



(3) $x > 0$ の範囲における関数 $y = \left(\log_2 \frac{x}{4}\right)^2 - 4 \log_4 x + 3$ の最小値を求めよう。

$t = \log_2 x$ とおく。

$$\log_2 \frac{x}{4} = \log_2 x - \log_2 4 = t - 2$$

$$\log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{t}{2}$$

となることから

$$y = (t - 2)^2 - 4 \times \frac{t}{2} + 3 = t^2 - 6t + 7$$

である。

x が $x > 0$ の範囲を動くとき、 $t = \log_2 x$ のとり得る値の範囲は**実数全体**である。

$y = (t - 3)^2 - 2$ より関数 y は $t < 3$ の範囲では減少し、 $t > 3$ の範囲では増加する。

したがって、 y は $t = 3$ のとき、すなわち $x = 2^3 = 8$ のとき、最小値 -2 をとる。

[1] の正解

ア	イ	ウエ	オ	カ	キ	ク	ケ
4	2	-2	3	2	3	1	1
コ	サ	シ	ス	セ	ソタ		
6	7	3	3	8	-2		

[2] k を正の定数として

$$\cos^2 x - \sin^2 x + k \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

を満たす x について考える。

(1) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲で ① を満たす x の個数について考えよう。

① の両辺に $\sin^2 x \cos^2 x$ をかけ、2倍角の公式を用いて変形すると

$$\left(\frac{\sin^2 2x}{\boxed{\text{チ}}} - k \right) \cos 2x = 0 \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

を得る。したがって、 k の値に関係なく、 $x = \frac{\pi}{\boxed{\text{ツ}}}$ のときはつねに ① が成

り立つ。また、 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲で $0 < \sin^2 2x \leq 1$ であるから、 $k > \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$

のとき、① を満たす x は $x = \frac{\pi}{\boxed{\text{ツ}}}$ のみである。一方、 $0 < k < \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ のと

き、① を満たす x の個数は $\boxed{\text{ナ}}$ 個である、 $k = \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ のときは $\boxed{\text{ニ}}$ 個

である。

(2) $k = \frac{4}{25}$ とし、 $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲で ① を満たす x について考えよう。

② により $\cos 2x = \frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ であるから

$$\cos 2x = \frac{\boxed{\text{ノハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}}$$

である。したがって

$$\cos x = \frac{\sqrt{\boxed{\text{フ}}}}{\boxed{\text{ヘ}}}$$

である。

$$\cos^2 x - \sin^2 x + k \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

を満たす x について考える。

(1) 2倍角の公式より

$$\begin{aligned} \cos^2 x - \sin^2 x &= \cos 2x \\ \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} &= \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} = \frac{-\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} \end{aligned}$$

が成り立つ。このことから、 $\textcircled{1}$ の両辺に $\sin^2 x \cos^2 x$ をかけ変形すると

$$\begin{aligned} \cos 2x \times \sin^2 x \cos^2 x + k \times \cos 2x &= 0 \\ \Rightarrow \cos 2x \times \frac{1}{4} \sin^2 2x + k \cos 2x &= 0 \\ \Rightarrow \left(\frac{\sin^2 2x}{4} - k \right) \cos 2x &= 0 \quad \dots\dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

を得る。したがって、 $\textcircled{1}$ が成り立つとき、

$$\frac{\sin^2 2x}{4} - k = 0 \quad \text{or} \quad \cos 2x = 0$$

が成り立つ。 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲で $\cos 2x = 0$ を満たす x は $x = \frac{\pi}{4}$ である。この値は k の値に関係なく、つねに ① が成り立つ。

また、

$$\frac{\sin^2 2x}{4} - k = 0 \Rightarrow \sin^2 2x = 4k$$

が成り立つ。 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲で $0 < \sin^2 2x \leq 1$ であることから、① を満たす x の個数を k の値で場合分けをして求める。

$k > \frac{1}{4}$ のとき、 $4k > 1$ より $\sin^2 2x = 4k$ を満たす x は存在しない。よ

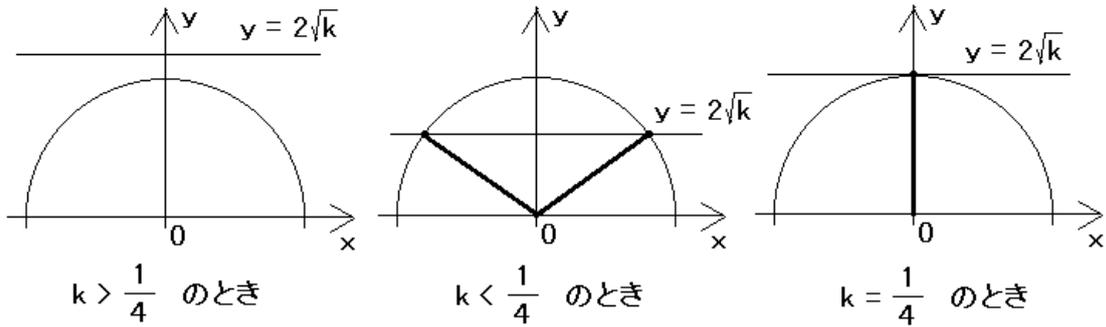
って ① を満たす x は $x = \frac{\pi}{4}$ のみである。

$0 < k < \frac{1}{4}$ のとき、 $0 < 4k < 1$ より $0 < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲で $\sin^2 2x = 4k$ を満たす x は 2 個存在する。よって ① を満たす x は $x = \frac{\pi}{4}$ と合わせて 3 個である。

$k = \frac{1}{4}$ のとき、 $4k = 1$ より $0 < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲で

$$\sin^2 2x = 4k = 1 \Rightarrow \sin 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

となるため、① を満たす x は $x = \frac{\pi}{4}$ のみの 1 個である。



(2) $k = \frac{4}{25}$ とし、 $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲で ① を満たす x について考えよう。

範囲から、 $\sin 2x > 0$ であるため、② により

$$\sin^2 2x = 4 \times \frac{4}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \sin 2x = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

である。また $\cos 2x < 0$ であることから

$$\cos 2x = -\sqrt{1 - \sin^2 2x} = \frac{-3}{5}$$

である。したがって $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ より

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{3}{5} + 1 \right) = \frac{1}{5}$$

$\cos x > 0$ より

$$\cos x = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

である。

[2] の正解

チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ
4	4	1	4	3	1
ヌ	ネ	ノハ	ヒ	フ	ヘ
4	5	-3	5	5	5