

2016 年度センター試験 数学 2 B

第 2 問

座標平面上で、放物線 $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ を C_1 とし、放物線 $y = \frac{1}{4}x^2$ を C_2 とする。

(1) 実数 a に対して、2 直線 $x = a$ と $x = a + 1$ で囲まれた図形 D の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_a^{a+1} \left(\frac{1}{\boxed{\text{ア}}} x^2 + \frac{1}{\boxed{\text{イ}}} \right) dx \\ &= \frac{a^2}{\boxed{\text{ウ}}} + \frac{a}{\boxed{\text{エ}}} + \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カキ}}} \end{aligned}$$

である。 S は $a = \frac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ で最小値 $\frac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{スセ}}}$ をとる。

(2) 4 点 $(a, 0), (a + 1, 0), (a + 1, 1), (a, 1)$ を頂点とする正方形を R で表す。 a が $a \geq 0$ の範囲を動くとき、正方形 R と (1) の図形 D の共通部分の面積を T とおく。 T が最大となる a の値を求めよう。

直線 $y = 1$ は、 C_1 と $(\pm \boxed{\text{ソ}}, 1)$ で、 C_2 と $(\pm \boxed{\text{タ}}, 1)$ で交わる。

したがって、正方形 R と図形 D の共通部分が空集合にならないのは $0 \leq a \leq \boxed{\text{チ}}$ のときである。

$\boxed{\text{ソ}} \leq a \leq \boxed{\text{チ}}$ のとき、正方形 R は放物線 C_1 と x 軸の間にあり、この範囲で a が増加するとき、 T は $\boxed{\text{ツ}}$ 。 $\boxed{\text{ツ}}$ に当てはまるものを、次の ① ～ ② のうちから一つ選べ。

- ① 増加する ① 減少する ② 変化しない。

したがって、 T が最大になる a の値は、 $0 \leq a \leq \boxed{\text{ソ}}$ の範囲にある。

$0 \leq a \leq \boxed{\text{ソ}}$ のとき、(1) の図形 D のうち、正方形 R の外側にある部分の面積 U は

$$U = \frac{a^3}{\boxed{\text{テ}}} + \frac{a^2}{\boxed{\text{ト}}}$$

である。よって $0 \leq a \leq \boxed{\text{ソ}}$ において

$$T = -\frac{a^3}{\boxed{\text{ナ}}} - \frac{a^2}{\boxed{\text{ニ}}} + \frac{a^2}{\boxed{\text{ヌ}}} + \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カキ}}}$$

である。① の右辺の増減を調べることにより、 T は

$$a = \frac{\boxed{\text{ネノ}} + \sqrt{\boxed{\text{ハ}}}}{\boxed{\text{ヒ}}}$$

で最大値をとることがわかる。

(1) すべての実数 x に対して

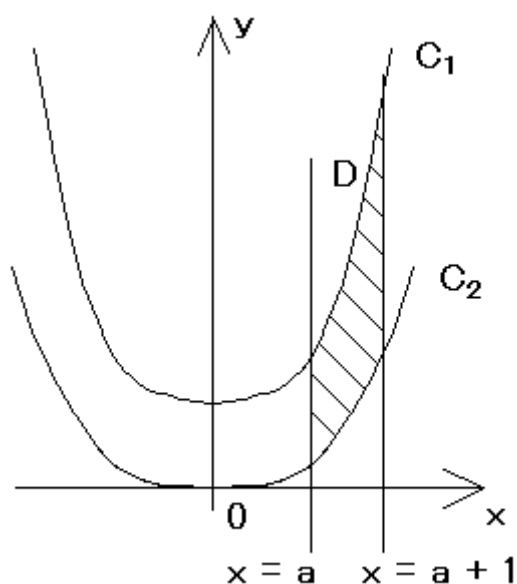
$$\frac{1}{4}x^2 \leq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$$

であることから、図形 D の面積 S を求めると

$$S = \int_a^{a+1} \left\{ \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{4}x^2 \right\} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_a^{a+1} \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2} \right) dx \\
&= \left[\frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{2}x \right]_a^{a+1} \\
&= \left\{ \frac{1}{12}(a+1)^3 + \frac{1}{2}(a+1) \right\} - \left(\frac{1}{12}a^3 + \frac{1}{2}a \right) \\
&= \frac{a^2}{4} + \frac{a}{4} + \frac{7}{12}
\end{aligned}$$

である。



この式を変形すると

$$S = \frac{1}{4} \left(a + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{25}{48}$$

となることから、 S は $a = \frac{-1}{2}$ で最小値 $\frac{25}{48}$ をとる。

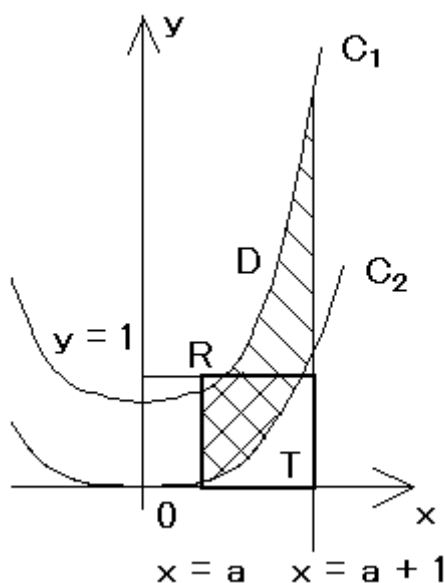
(2) 4 点 $(a, 0), (a+1, 0), (a+1, 1), (a, 1)$ を頂点とする正方形を R で表す。

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow x = \pm 1, \quad \frac{1}{4}x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 2$$

であることから、直線 $y = 1$ は、 C_1 と $(\pm 1, 1)$ で、 C_2 と $(\pm 2, 1)$ で交わる。 $0 \leq a$ の範囲では、 C_1, C_2 はともに増加関数のグラフとなるため、正方形 R と図形 D の共通部分が空集合にならないのは $0 \leq a \leq 2$ のときである。

$1 \leq a \leq 2$ のとき、正方形 R は放物線 C_1 と x 軸の間にあり、この範囲で a が増加するとき、正方形 R は(1) の図形 D から離れるように移動するため、正方形 R と (1) の図形 D の共通部分の面積 T は減少する。

したがって、 T が最大になる a の値は、 $0 \leq a \leq 2$ の範囲にある。



$0 \leq a \leq 2$ のとき、(1) の図形 D のうち、正方形 R の外側にある部分は2直線 $x = a+1, y = 1$ と C_1 に囲まれた部分になる。よってこの部分の面積 U は

$$\begin{aligned}
U &= \int_1^{a+1} \left\{ \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \right) - 1 \right\} dx \\
&= \int_1^{a+1} \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \right) dx \\
&= \left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x \right]_1^{a+1} \\
&= \left\{ \frac{1}{6}(a+1)^3 - \frac{1}{2}(a+1) \right\} - \left(-\frac{1}{3} \right) \\
&= \frac{a^3}{6} + \frac{a^2}{2}
\end{aligned}$$

である。よって $0 \leq a \leq 1$ において

$$\begin{aligned}
T &= S - U \\
&= \left(\frac{a^2}{4} + \frac{a}{4} + \frac{7}{12} \right) - \left(\frac{a^3}{6} + \frac{a^2}{2} \right) \\
&= -\frac{a^3}{6} - \frac{a^2}{4} + \frac{a}{4} + \frac{7}{12} \quad \dots \textcircled{1}
\end{aligned}$$

である。① の右辺の増減を調べる。まず T を a で微分すると、

$$\frac{dT}{da} = -\frac{a^2}{2} - \frac{a}{2} + \frac{1}{4}$$

となるため、

$$\frac{dT}{da} = -\frac{a^2}{2} - \frac{a}{2} + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow 2a^2 + 2a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

$0 \leq a \leq 1$ の範囲での T の増減は以下の通りになる。

a	0		$\frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$		1
dT/da	+	+	0	−	−
T	増加	増加		減少	減少

以上から T は

$$a = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$$

で最大値をとることがわかる。

第 2 問の正解

ア	イ	ウ	エ	オ	カキ	クケ	コ	サシ	スセ		
4	2	4	4	7	12	−1	2	25	48		
ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ	ネノ	ハ	ヒ
1	2	2	1	6	2	6	4	4	−1	3	2