

2016 年度センター試験 数学 2 B

第 4 問

四面体 $OABC$ において $|\overrightarrow{OA}| = 3, |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = 2, \angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 60^\circ$ であるとする。また、辺 OA 上に点 P をとり、辺 BC 上に点 Q をとる。以下、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおく。

(1) $0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1$ であるような実数 s, t を用いて $\overrightarrow{OP} = s\vec{a}, \overrightarrow{OQ} = (1-t)\vec{b} + t\vec{c}$ と表す。 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = \boxed{\text{ア}}, \vec{b} \cdot \vec{c} = \boxed{\text{イ}}$ であることから

$$|\overrightarrow{PQ}| = (\boxed{\text{ウ}}s - \boxed{\text{エ}})^2 + (\boxed{\text{オ}}t - \boxed{\text{カ}})^2 + \boxed{\text{キ}}$$

となる。したがって、 $|\overrightarrow{PQ}|$ が最小となるのは $s = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}, t = \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ のとき

であり、このとき $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{\boxed{\text{シ}}}$ となる。

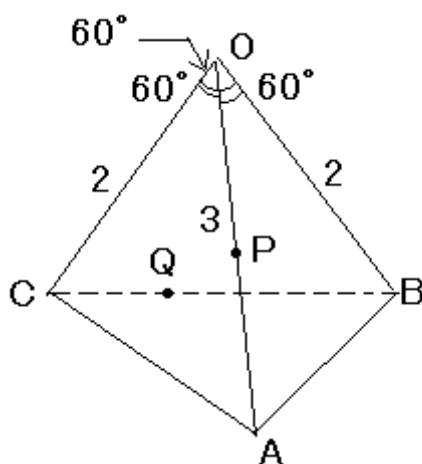
(2) 三角形 ABC の重心を G とする。 $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{\boxed{\text{シ}}}$ のとき、三角形 GPQ の面積を求めよう。

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{PQ} = \boxed{\text{ス}}$ から、 $\angle APQ = \boxed{\text{セソ}}^\circ$ である。したがって三角形 APQ の面積は $\sqrt{\boxed{\text{タ}}}$ である。また

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}} \overrightarrow{OA} + \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}} \overrightarrow{OQ}$$

であり、点 G は線分 AQ を ナ : 1 に内分する点である。

以上のことから、三角形 GPQ の面積は $\frac{\sqrt{\text{ニ}}}{\text{ヌ}}$ である。



(1) $0 \leq s \leq 1$, $0 \leq t \leq 1$ であるような実数 s, t を用いて $\overrightarrow{OP} = s \vec{a}$, $\overrightarrow{OQ} = (1-t) \vec{b} + t \vec{c}$ と表す。 $|\overrightarrow{OA}| = 3$, $|\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = 2$, $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 60^\circ$ であることから、

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot \cos \angle AOB = 3 \times 2 \times \frac{1}{2} = 3$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OC}| \cdot \cos \angle AOC = 3$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = |\overrightarrow{OB}| \cdot |\overrightarrow{OC}| \cdot \cos \angle BOC = 2 \times 2 \times \frac{1}{2} = 2$$

となる。

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = -s \vec{a} + (1-t) \vec{b} + t \vec{c}$$

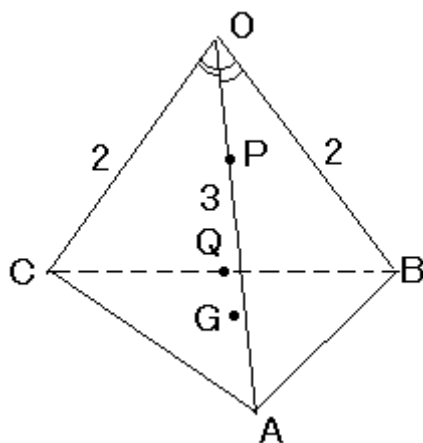
であることから

$$\begin{aligned}
 |\overrightarrow{PQ}|^2 &= \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PQ} \\
 &= \{-s \vec{a} + (1-t) \vec{b} + t \vec{c}\} \cdot \{-s \vec{a} + (1-t) \vec{b} + t \vec{c}\} \\
 &= s^2 |\vec{a}|^2 - 2s(1-t) \vec{a} \cdot \vec{b} - 2st \vec{a} \cdot \vec{c} \\
 &\quad + (1-t)^2 |\vec{b}|^2 + 2t(1-t) \vec{b} \cdot \vec{c} + t^2 |\vec{c}|^2 \\
 &= 9s^2 - 6s(1-t) - 6st \\
 &\quad + 4(1-t)^2 + 4t(1-t) + 4t^2 \\
 &= 9s^2 - 6s + 4t^2 - 4t + 4 \\
 &= (3s-1)^2 + (2t-1)^2 + 2
 \end{aligned}$$

となる。したがって、 $|\overrightarrow{PQ}|$ が最小となるのは $s = \frac{1}{3}, t = \frac{1}{2}$ のときであり、

このとき $|\overrightarrow{PQ}|^2 = 2$ より $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{2}$ となる。

(2) 三角形 ABC の重心を G とする。 $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{2}$ のとき、三角形 GPQ の面積を求めよう。



このとき

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3} \vec{a}, \quad \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2} \vec{b} + \frac{1}{2} \vec{c}$$

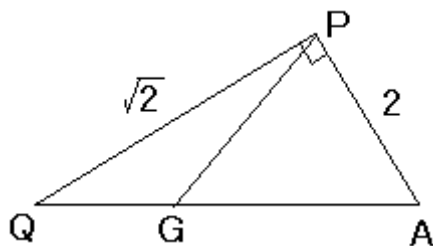
であることから、

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{PQ} = \vec{a} \cdot \left(\frac{1}{2} \vec{b} + \frac{1}{2} \vec{c} - \frac{1}{3} \vec{a} \right) = \frac{1}{2} \times 3 + \frac{1}{2} \times 3 - \frac{1}{3} \times 9 = 0$$

つまり、 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PQ} = \frac{2}{3} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$ となるため、 $\angle APQ = 90^\circ$ である。また、

$$|\overrightarrow{PA}| = \frac{2}{3} |\overrightarrow{OA}| = 2, \quad |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{2}$$

であることから、三角形 APQ の面積は $\frac{1}{3} |\overrightarrow{PA}| \times |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{2}$ である。



また、点 Q は辺 BC の中点であるため、三角形 ABC の重心 G は線分 AQ 上にあり、

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3} \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3} \overrightarrow{OQ}$$

を満たす。つまり、点 G は線分 AQ を $2:1$ に内分する点である。

以上のことから、三角形 GPQ の面積は

$$\frac{1}{3} \times \text{三角形 } APQ \text{ の面積} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

である。

第 4 問の正解

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
3	2	3	1	2	1	2	1	3
コ	サ	シ	ス	セソ	タ	チ	ツ	テ
1	2	2	0	90	2	1	3	2
ト	ナ	ニ	ヌ					
3	2	2	3					