

2016 年度センター試験 数学 2 B

第 5 問

n を自然数とする。原点 O から出発して数直線上に n 回移動する点 A を考える。点 A は、1 回ごとに、確率 p で正の向きに 3 だけ移動し、確率 $1 - p$ で負の向きに 1 だけ移動する。ここで、 $0 < p < 1$ である。 n 回移動した後の点 A の座標を X とし、 n 回の移動のうち正の向きの移動の回数を Y とする。

以下の問題を解答するにあたっては、必要に応じて 29 ページの正規分布表を用いてよい（正規分布表は省略）

(1) $p = \frac{1}{3}$, $n = 2$ のとき、確率変数 X のとり得る値は、小さい順に

－ ア, イ, ウ であり、これらの値をとる確率は、それぞれ

エ
オ, カ
オ, キ
オ である。

(2) n 回移動したとき、 X と Y の間に

$$X = \text{ク} n + \text{ケ} Y$$

の関係が成り立つ。

確率変数 Y の平均（期待値）は コ、分散は サ なので、確率変

数 X の平均（期待値）は シ、分散は ス である。に当てはまるも

のを、次の ㉠ ～ ㉢ のうちから一つずつ選べ。ただし、同じものを繰り返し選んでもよい。

- | | | |
|---------|----------------|----------------------|
| ㉠ np | ㉡ $np(1 - p)$ | ㉢ $\frac{p(1-p)}{2}$ |
| ㉣ $2np$ | ㉤ $2np(1 - p)$ | ㉥ $p(1 - p)$ |

⑥ $4np$

⑦ $4np(1-p)$

⑧ $16np(1-p)$

⑨ $4np - n$

㉑ $4np(1-p) - n$

㉒ $16np(1-p) - n$

(3) $p = \frac{1}{4}$ のとき、1200 回移動した後の点 A の座標が 120 以上になる確率の近似値を求めよう。

(2) により、 Y の平均は セソタ、標準偏差は チツ であり、求める確率は次のようになる。

$$P(X \geq 120) = P\left(\frac{Y - \text{セソタ}}{\text{チツ}} \geq \text{テ} \cdot \text{トナ}\right)$$

いま、標準正規分布に従う確率変数を Z とすると、 $n = 1200$ は十分に大きいので、求める確率の近似値は正規分布表から次のように求められる。

$$P(Z \geq \text{テ} \cdot \text{トナ}) = 0. \text{ニヌネ}$$

(4) p の値がわからないとする。2400 回移動した後の点 A の座標が $X = 1400$ のとき、 p に対する信頼度 95% の信頼区間を求めよう。

n 回移動したときに Y がとる値を y とし、 $r = \frac{y}{n}$ とおくと、 n が十分大きいならば、確率変数 $R = \frac{Y}{n}$ は近似的に平均 p 、分散 $\frac{p(1-p)}{n}$ の正規分布に従う。

$n = 2400$ は十分に大きいので、このことを利用して、分散を $\frac{r(1-r)}{n}$ で置き換えることにより、求める信頼区間は

$$0. \text{ノハヒ} \leq p \leq 0. \text{フヘホ}$$

となる。

(1) $p = \frac{1}{3}$, $n = 2$ のとき、確率変数 X のとり得る値は、小さい順に

- ・ 2回とも負の方向に移動した場合、 $X = (-1) + (-1) = -2$
- ・ 1回ずつ正、負の方向に移動した場合、 $X = 3 + (-1) = 2$
- ・ 2回とも正の方向に移動した場合、 $X = 3 + 3 = 6$

であり、これらの値をとる確率を求めると、

- ・ $X = -2$ となる、つまり2回とも負の方向に移動する確率は

$$\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

- ・ $X = 2$ となる、つまり1回ずつ正、負の方向に移動する確率は

$$2 \times \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{9}$$

- ・ $X = 6$ となる、つまり2回とも正の方向に移動する確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

である。

(2) n 回移動したとき、正の方向には Y 回、負の方向には $n - Y$ 回移動するため、

$$X = 3 \times Y + (-1) \times (n - Y) = -n + 4Y$$

の関係が成り立つ。

次に確率変数 Y の平均（期待値）を $E(Y)$ 、分散を $V(Y)$ とおき、それぞれの値を求める。 n 回の移動の k 回目で正の方向に移動した回数を Y_k とおく。このとき $Y_k = 0$ または 1 であり、

$$Y = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$$

が成り立つ。一回ごとの移動は互いに独立であり、すべて同じ試行を行うため

$$E(Y) = E(Y_1) + E(Y_2) + \cdots + E(Y_n) = n E(Y_1)$$

$$V(Y) = V(Y_1) + V(Y_2) + \cdots + V(Y_n) = n V(Y_1)$$

が成り立つ。 $E(Y_1)$, $V(Y_1)$ の値を求めると

$$E(Y_1) = 1 \times p + 0 \times (1 - p) = p$$

$$V(Y_1) = (1 - p)^2 \times p + (-p)^2 \times (1 - p) = p(1 - p)$$

となるため、

$$E(Y) = np, \quad V(Y) = np(1 - p)$$

である。よって X の平均は

$$-n + 4 \times E(Y) = 4np - n$$

X の分散は

$$-n + 4 \times V(Y) = 4np(1 - p) - n$$

である。

(3) $p = \frac{1}{4}$ のとき、1200 回移動した後の点 A の座標が 120 以上になる確率の近似値を求めよう。

(2) により、 Y の平均は $1200 \times \frac{1}{4} = 300$ 、標準偏差は

$$\sqrt{1200 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4}} = \sqrt{225} = 15$$

である。点 A の座標が 120 以上であるときの Y の範囲を求めると

$$X = -1200 + 4Y \geq 120 \Rightarrow Y \geq 330$$

となる。つまり

$$P(X \geq 120) = P(Y \geq 330)$$

となる。また $(330 - 300)/15 = 2.00$ であるため、求める確率は次のようになる。

$$P(X \geq 120) = P\left(\frac{Y - 300}{15} \geq 2.00\right)$$

いま、標準正規分布に従う確率変数を Z とすると、 $n = 1200$ は十分に大きいので、求める確率の近似値は正規分布表から求められる。

標準正規分布に従う確率変数 Z に対して、 $P(Z \geq 0) = 0.5$ である。また正規分布表から $P(0 \leq Z \leq 2.0) = 0.4772$ であるため、

$$P(Z \geq 2.00) = 0.5 - 0.4772 = 0.0228 \cong 0.023$$

である。

(4) p の値がわからないとする。2400 回移動した後の点 A の座標が $X = 1400$ のとき、 p に対する信頼度 95% の信頼区間を求めよう。

このとき、正の方向に移動した回数 Y を求めると

$$1440 = -2400 + 4Y \Rightarrow Y = 960$$

となる。

n 回移動したときに Y がとる値を y とし、 $r = \frac{y}{n}$ とおくと、 n が十分大きいならば、確率変数 $R = \frac{Y}{n}$ は近似的に平均 p 、分散 $\frac{p(1-p)}{n}$ の正規分布に従う。つまり、 $p = R$ と置き換えて、分散を $\frac{R(1-R)}{n}$ と考えることがで

きる。

上の問題の場合、 $R = \frac{Y}{n} = \frac{960}{2400} = \frac{2}{5} = 0.4$ となり、分散は

$$\frac{R(1-R)}{n} = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{1}{2400} = \frac{1}{10000}$$

つまり、標準偏差は $\frac{1}{100} = 0.01$ である。

正規分布表から信頼度 95% の信頼区間は $-1.96 \leq z_0 \leq 1.96$ となるため、求める信頼区間は

$$-1.96 \leq \frac{p - 0.4}{0.01} \leq 1.96$$

を満たす。これより

$$-0.0196 \leq p - 0.4 \leq 0.0196 \Rightarrow 0.3804 \leq p \leq 0.4196$$

となり

$$\mathbf{0.380 \leq p \leq 0.420}$$

となる。

第 3 問の正解

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ
－2	2	6	4	9	4	1
ク	ケ	コ		サ	シ	ス
－	4	0		1	9	8
セソタ	チツ	テ		トナ	ニヌネ	
300	15	2		00	023	
ノハヒ	フヘホ					
380	402					