2016 年度センター試験　工業数理基礎 1

第 1 問

問１　電気回路で、抵抗のつながり方が異なっていても電気的に同じ働きをする場合、これらの回路は等価であるといわれる。ここでは図 1 の電気回路において点線で囲まれた部分（回路 1）と図 2 の電気回路において点線で囲まれた部分（回路２）が、適切な抵抗を設定することによって等価になることを示してみる。

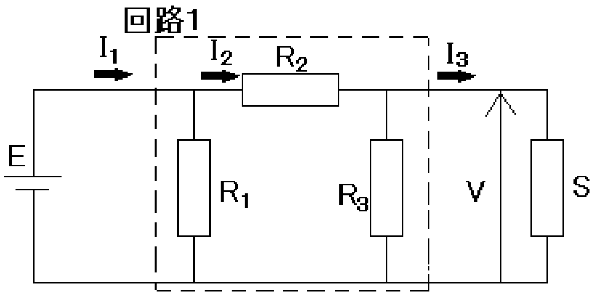


図　1

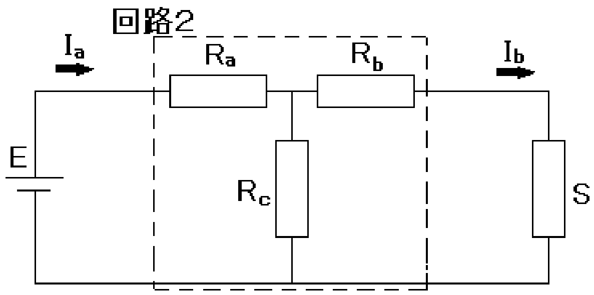


図　2

図１、図２で、

・抵抗 R_1 ,R_2 ,R_3 の値はいずれも R [Ω]
・抵抗 R_a ,R_b ,R_c の値はいずれも r [Ω]
・抵抗 S の値は s [Ω]、電池の起電力は E [V]
・図のように電流 I_1 [A], I_2[A], I_3 [A], I_a [A], I_b [A] が流れるもの

とする。

回路１において、抵抗 R_3 と S は並列である。よって抵抗 R_3 と S には同じ電圧 V [V] が加わる。また R_3 を流れる電流と S を流れる電流の和

は I_2 となるため、R_3 を流れる電流は $I_2 - I_3$ である。

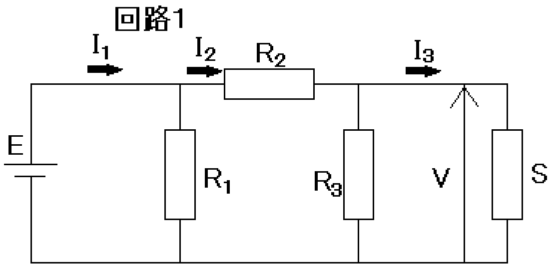
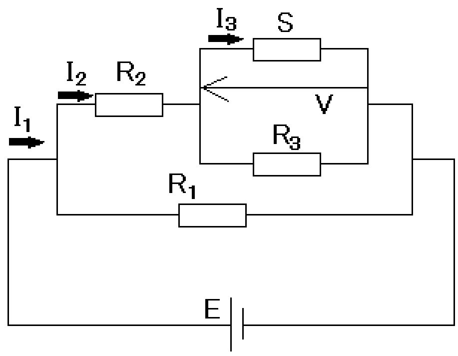


図 1



（回路1の配置を替えたもの）

よって、オームの法則から次の式が成り立つ。

$$V = R(\boldsymbol{I_2} - \boldsymbol{I_3}) \tag{1}$$

一方、抵抗 S に流れる電流は I_3 であるため、次の式が成り立つ。

$$V = s\, I_3 \tag{2}$$

式 (1) と式 (2) から V を消去すると

$$R(I_2 - I_3) = s\, I_3 \Rightarrow \ R\, I_2 = (R + s)\, I_3$$

となる。抵抗 R_2 に加わる電圧は $R\, I_2$ である。ここで、R_1 と R_2, R_3, S は並列に繋がれていることから、各々に加わる電圧はともに E である。よって、$E = R\, I_2 + V$ が成り立つ。以上のことから、E と I_3 の関係を次のように表すことができる。

$$E = R\, I_2 + V = (R + s)\, I_3 + s\, I_3 = (R + \mathbf{2}\, s)\, I_3 \tag{3}$$

次に回路２について考える。回路２は R_b, S と R_c が並列に繋がれ、さらにこれらが R_a と直列に繋がれている。よって起電力 E は２つの抵抗 R_a ,R_c に加わる電圧の和になる。

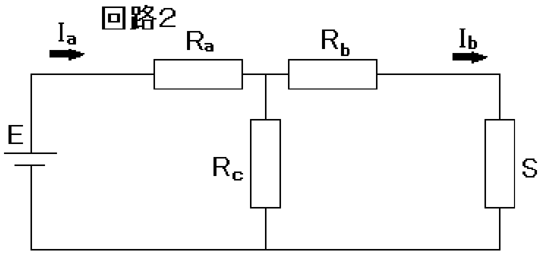
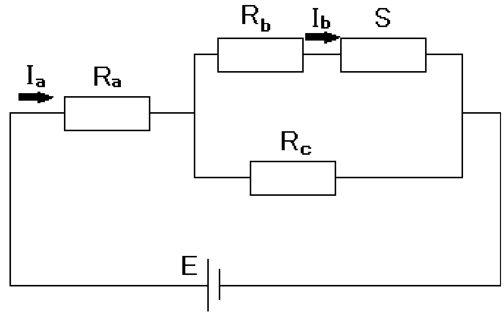


図 2



（回路の配置を替えたもの）

R_c に流れる電流は $I_a - I_b$ であることから

$$E = r\,I_a + r\,(I_a - I_b) \tag{4}$$

となる。一方、抵抗 R_b と S には同じ電流 I_b が流れるので、

$$E = r\,I_a + (\boldsymbol{r} + \boldsymbol{s})\,I_b \tag{5}$$

式 (4) と式 (5) から I_a を消去する。式 (5) より $r\,I_a = E - (r + s)\,I_b$ となる。この式を (4) に代入すると

$$\begin{aligned} E &= 2\,r\,I_a - r\,I_b \\ &= 2\,\{E - (r + s)\,I_b\} - r\,I_b \\ &= 2\,E - 2\,(r + s)\,I_b - r\,I_b \\ &= 2\,E - (3\,r + 2\,s)\,I_b \\ \Rightarrow E &= (\boldsymbol{3}\,\boldsymbol{r} + \boldsymbol{2}\,\boldsymbol{s})\,I_b \end{aligned} \tag{6}$$

が得られる。

回路１と回路２が等価になるとき、抵抗 S を流れる電流 I_3 と I_b は等しくなる。この条件を用いて式 (3) と式 (6) から E を消去すると、以下の式が得られる。

$$\begin{aligned} &(R + 2\,s)\,I_3 = (3\,r + 2\,s)\,I_b \\ &\Rightarrow R + 2\,s = 3\,r + 2\,s \\ &\Rightarrow R = \boldsymbol{3}\,r \end{aligned} \tag{7}$$

なお、式 (7) が成り立っているとき、電流から流れ出す電流 I_1 と I_a も等し

くなる。すなわち、式 (7) を満たすような抵抗を使えば、回路１と回路２は等価になる。

問１の正解

ア	イ	ウ	エ	オ
2	**2**	**1**	**5**	**3**

補足：２つの回路全体の抵抗を求める。

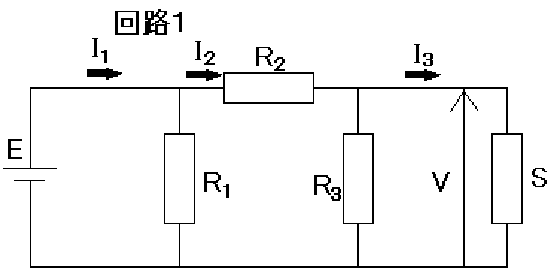
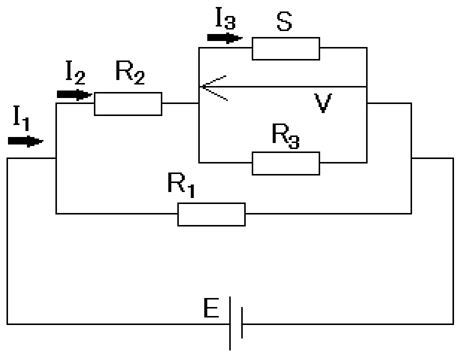


図　1



（回路1の配置を替えたもの）

回路１において、S と R_3 の並列部分の抵抗の値は

$$\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{R}\right)^{-1}=\frac{Rs}{R+s}$$

であるため、この並列部分と R_2 の直列部分の抵抗の値は

$$R+\frac{Rs}{R+s}=\frac{R(R+2s)}{R+s}$$

となる。よって回路１全体の抵抗は

$$\left(\frac{1}{R}+\frac{R+s}{R(R+2s)}\right)^{-1}=\left(\frac{2R+3s}{R(R+2s)}\right)^{-1}=\frac{R(R+2s)}{2R+3s}$$

である。

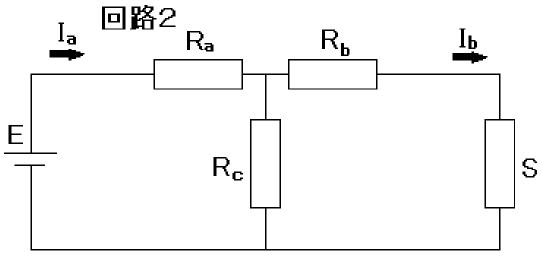
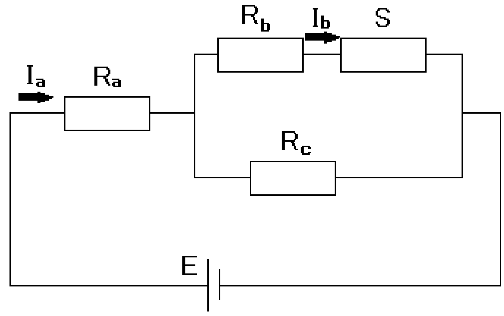


図 2



（回路の配置を替えたもの）

回路２において、R_b, S と R_c の並列部分の抵抗の値は

$$\left(\frac{1}{r+s}+\frac{1}{r}\right)^{-1}=\left(\frac{2\,r+s}{r(r+s)}\right)^{-1}=\frac{r\,(r+s)}{2\,r+s}$$

となる。よって回路２全体の抵抗は

$$r+\frac{r(r+s)}{2\,r+s}=\frac{r(3\,r+2\,s)}{2\,r+s}$$

である。

以上から式 (7) $R=3\,r$ が成り立っているとき、

$$\frac{R(R+2s)}{2R+3s}=\frac{3r(3r+2s)}{6r+2s}=\frac{r(3\,r+2\,s)}{2\,r+s}$$

となり、二つの回路の抵抗が等しくなる。つまり、電流から流れ出す電流 I_1 と I_a も等しくなることがわかる。

問２　地面から垂直に立てられた棒に長方形のプレートを接合する。このプレートが風を受けたとき、棒の根元にかかる曲げモーメントを考える。

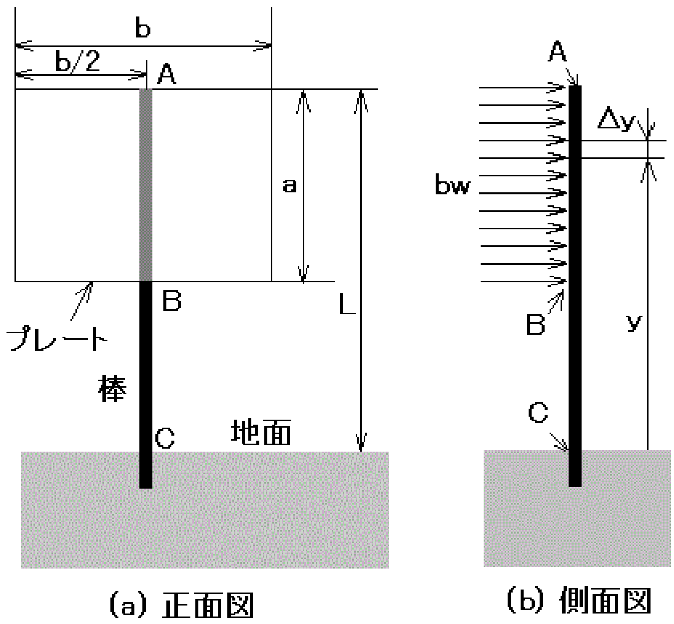


図3

図３ (a), (b) において、

・棒の長さは L[m] 、プレートは高さ a[m] 、幅 b[m] で $a < L$
・風はプレートに対して垂直に力がかかり、その力の単位面積当たりの大きさは w[N/m^2]
・棒の上端とプレートの上辺の接合部分を A 、プレートの下端を B 、棒の根元を C とする。
・プレートの重さ、BC 間への風の作用は無視するものとする。

風の力 w がプレート全体に一様に作用するとき、プレート全体に作用する力の大きさは $w \times a \times b = \boldsymbol{abw}$ [N] となる。

図３ (b) のように、AB 間に地面から高さ y [m] に位置する微小区間 Δy [m] を考える。AB 間において、単位長さ当たりで棒に作用する力は、プレートの縦 １m 横 b m の部分に作用する力になる。よって $b \times w = b\,w$ [N/m] の等分布荷重がかかっている。このため、微小区間 Δy に作用する荷重は $b\,w \times \Delta y = b\,w\,\Delta y$ [N] となる。

この荷重による点 C のまわりのモーメントの大きさは、点 C から微小区間 Δy までの距離が y であることから、

$$b\,w\,\Delta y \times y = \boldsymbol{bwy\Delta y}\ [\mathrm{N \cdot m}]$$

となる。

点 C における曲げモーメントの大きさ $M_c[\mathrm{N \cdot m}]$ は、$bwy\Delta y\ [\mathrm{N \cdot m}]$ で表されるモーメントの点 B から点 A までの総和に等しく、以下の定積分により求めることができる。

$$M_c = \int_{L-a}^{L} bwy\,dy$$

$$= \left[\boldsymbol{bw\frac{y^2}{2}}\right]_{L-a}^{L}$$

$$= \left(bw\frac{L^2}{2}\right) - \left(bw\frac{(L-a)^2}{2}\right)$$

$$= \boldsymbol{abw\left(L - \frac{a}{2}\right)}$$

$a/2$ はプレートの縦の長さの半分にあたる。よって、$L - a/2$　という値は棒の上端である点 A からプレートの縦の長さの半分だけ下がった高さになる。つまり、地面から AB の中点までの距離にあたる。

以上から、曲げモーメント M_c の値は、プレート全体に作用する力の大きさと地面から $\boldsymbol{AB}$ **の中点**までの距離との積になる。すなわち曲げモーメント M_c はプレート全体に作用する力が AB の中点に集中して作用し場合と等しいことがわかる。

［２］の正解

カ	キ	ク	ケ	コ
4	**2**	**4**	**4**	**2**