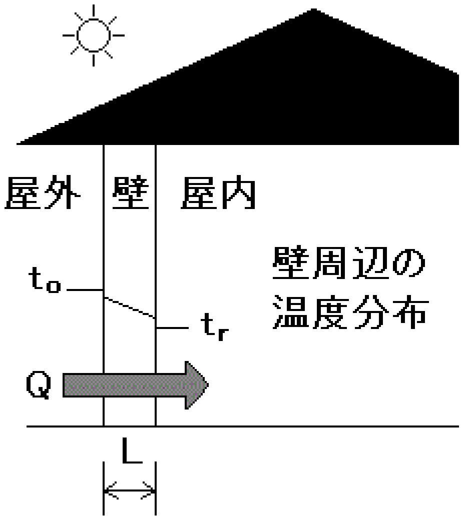
2016年度センター試験　工業数理基礎１

第２問

　建物の屋外から屋内への熱の侵入を抑えて、冷房の消費エネルギーの削減を図る方法として「壁の断熱化」について考える。

問１　単位時間に壁の単位面積当たりに流れる熱量を熱流束という。屋外から屋内へ、壁の厚さ方向に通過する熱流束を Q [W/m^2] とする。ただし、外気温と室温および壁内部の温度分布は時間変化しない状態を考える。



このとき、Q は外気温 t_0 [℃] と室温 t_r [℃] $(t_0 > t_r)$ の差に比例し、次式で表される。

$$Q = K(t_0 - t_r) \tag{1}$$

比例定数の K は熱通過率といい、単位は式 (1) 両辺の単位をもとに考えると、

(1) の左辺の単位：W/m^2
(1) の右辺の単位：(熱通過率の単位) × ℃

より、熱通過率の単位は　$\mathbf{W/(m^2 \cdot ℃)}$ となる。K は壁を介した熱の通過のしやすさを表しており、室外・室内と壁表面との熱の伝わりやすさ、壁内部の

熱伝導のしやすさを総合した値で、次式のように表される。

$$K = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_o} + \frac{L}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_r}} \qquad (2)$$

ここで、各値は以下の通りである。

α_o $[\mathrm{W/(m^2 \cdot ℃)}]$ ： 屋外から屋外側の壁表面への熱の伝わりやすさ
α_r $[\mathrm{W/(m^2 \cdot ℃)}]$ ： 室内側の壁表面から室内への熱の伝わりやすさ
λ $[\mathrm{W/(m^2 \cdot ℃)}]$ ： 壁の熱伝導率 $(\lambda > 0)$
L $[\mathrm{m}]$ ：壁の厚さ

以下、$\alpha_o = 20\ \mathrm{W/(m^2 \cdot ℃)},\ \alpha_r = 10\ \mathrm{W/(m^2 \cdot ℃)}$ と定数で表すものとする。このとき、式 (2) の K と L および λ の関係を見るため、横軸に λ、縦軸に K を置いたグラフの概形を考える。$1/\alpha_0 + 1/\alpha_r$ は定数であるため、α' と表す。

$$\lambda:\ 増加\ \Rightarrow \frac{L}{\lambda}:\ 減少\ \Rightarrow K = \frac{1}{\alpha' + \frac{L}{\lambda}}:\ 増加$$

となるため、グラフは増加する。一方

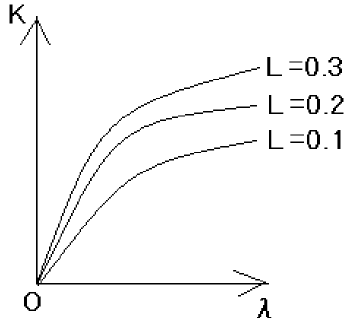
$$L:\ 増加\ \Rightarrow \frac{L}{\lambda}:\ 増加\ \Rightarrow K = \frac{1}{\alpha' + \frac{L}{\lambda}}:\ 減少$$

となるため、L の値が高いほど、グラフの概形は下がっていく。以上からグラフの概形は ① となる。

問 1 の正解

ア	イ
1	**1**

① のグラフ



問２　式 (1), (2) を用いて、快適性と省エネルギー性を両立できる環境を設計しよう。建物の壁の熱伝導率を λ_1 [W/(m^2 · ℃)]、厚さを L_1 [m]、熱通過率を K_1 [W/(m^2 · ℃)] とする。外気温と室温の差が 10 ℃ であるとすると、$t_o - t_r = 10$ であることから、屋外から室内に流入する熱流束 Q_1 [W/m^2] は、式 (1) から、

$$Q_1 = K_1 \times 10 = \mathbf{10}\ \boldsymbol{K_1} \tag{3}$$

と表される。

ここで、冷房の消費エネルギー削減のため、冷房の設定温度を 4 ℃ 上げた場合の熱流束 Q_2 [W/m^2] を考える。このとき、壁の熱通過率の変化はなく K_1 であり、外気温と室温の差は 6 ℃ となる。以上から Q_2 は式 (1) と (3) を使い、以下の通りに表される。

$$Q_1 = K_1 \times 6 = 6\,K_1 = 0.6 \times 10\,K_1 = \mathbf{0.6}\,Q_1$$

となる。この場合、室内に侵入する熱が減少し、冷房の消費エネルギーが削減されるが、室温が 4 ℃ 上がるので暑く感じる。

そこで、冷房の設定温度を上げずに（外気温と室温の差 10 ℃)、壁の熱伝導率の小さいものに変更して断熱性を向上させることにより、屋外から屋内に流入する熱流束を Q_2 に保ち、エネルギーを削減することを考える。影の厚さを L_1、壁の熱伝導率を λ_1 として、外気温と室温の差を 6 ℃ にしたときの熱流束 Q_2 の式は

$$Q_2 = K \times 6 = \frac{6}{\frac{1}{20} + \frac{L_1}{\lambda_1} + \frac{1}{10}}$$

壁の厚さを変えず、熱伝導率が λ_2 [W/(m · ℃)] である素材の壁を使う。この壁で外気温と室温の差 10 ℃ でありながら熱流束が Q_2 と変わらないとき

$$Q_2 = K \times 10 = \frac{10}{\frac{1}{20} + \frac{L_1}{\lambda_2} + \frac{1}{10}}$$

以上から次式を得る。

$$\frac{6}{\frac{1}{20} + \frac{L_1}{\lambda_1} + \frac{1}{10}} = \frac{10}{\frac{1}{20} + \frac{L_1}{\lambda_2} + \frac{1}{10}} \tag{4}$$

ここで、式 (4) を変形すると

$$6 \times \left(\frac{1}{20} + \frac{L_1}{\lambda_2} + \frac{1}{10}\right) = 10 \times \left(\frac{1}{20} + \frac{L_1}{\lambda_1} + \frac{1}{10}\right)$$

$$\frac{6L_1}{\lambda_2} + \frac{9}{10} = \frac{10L_1}{\lambda_1} + \frac{15}{10}$$

$$\frac{6L_1}{\lambda_2} = \frac{10L_1}{\lambda_1} + \frac{3}{5} = \frac{50L_1 + 3\lambda_1}{5\lambda_1}$$

$$\lambda_2 = 6\,L_1 \times \frac{5\,\lambda_1}{50L_1 + 3\,\lambda_1} = \frac{30\,L_1\,\lambda_1}{50L_1 + 3\,\lambda_1}$$

となる。いま、壁の厚さ L_1 を 0.18 m とすると、

$$\lambda_2 = \frac{5.4\,\lambda_1}{9 + 3\,\lambda_1} = \frac{18\,\lambda_1}{30 + 10\,\lambda_1}$$

が得られる。例えば、壁が $\lambda_1 = 1.5$ W/(m · ℃) の材料（コンクリート）であるとき、

$$\lambda_2 = \frac{18 \times 1.5}{30 + 10 \times 1.5} = 0.6$$

である。つまり、$\boldsymbol{\lambda_2 = 0.6}\ \mathrm{W/(m \cdot ℃)}$ の材料に変更すると、冷房の設定温度を上げずに熱流束を Q_2 に保つことができるため、エネルギーを削減することができる。

問２の正解

ウ	エ	オ	カ	キ
3	**0**	**6**	**0**	**6**

問３　壁は数種類の建築材料で構成されることが多い。

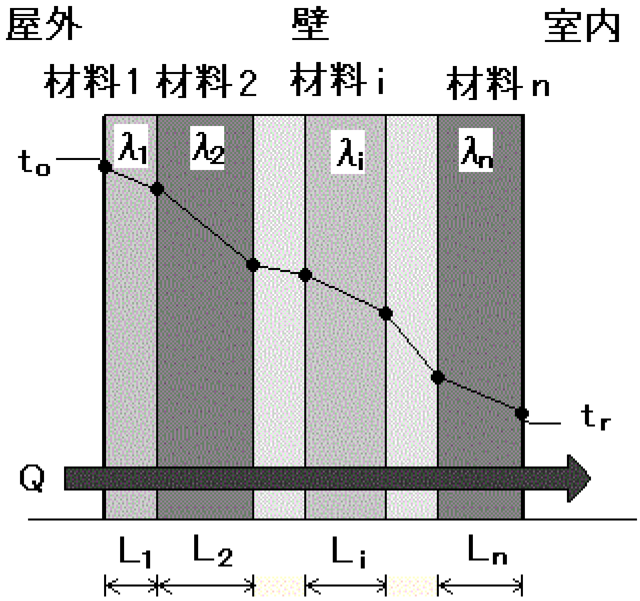


図２のような n 層の壁で、材料 i の熱伝導率を λ_i [W/(m · ℃)]、厚さを L_i [m] とすると、通過する熱流束 Q は、式 (1) と (2) を拡張して、

$$Q = \frac{t_o - t_r}{\frac{1}{20} + \sum_{i=1}^{n} \frac{L_i}{\lambda_i} + \frac{1}{10}} \tag{5}$$

と表される。

表１のような４種類の材料に、断熱性向上のため、材料をもう１種類加えて、壁を構成しよう。

i	建築材料	λ_i [W/(m・℃)]	L_i [m]	$\frac{L_i}{\lambda_i}$
1	タイル	**1.3**	**0.005**	**0.004**
2	モルタル	**1.1**	**0.020**	**0.018**
3	コンクリート	**1.5**	**0.120**	**0.080**
4	石こうボード	**0.17**	**0.015**	**0.088**
合　計			**0.160**	**0.190**

	建築材料	λ [W/(m・℃)]
A	グラスウール	**0.035**
B	ロックウール	**0.058**
C	軟質繊維板	**0.081**
D	半硬質繊維板	**0.110**
E	ま　つ	**0.179**

温度条件を $t_o = 34\ ℃, t_r = 24\ ℃$ とすると、表１の４種類の材料のみの場合の Q を計算すると

$$Q = \frac{34-24}{\frac{1}{20}+\sum_{i=1}^{4}\frac{L_i}{\lambda_i}+\frac{1}{10}} = \frac{10}{0.050+0.190+0.100} \sim 29.4\ \mathrm{W/m^2}$$

となる。

これに、もう１種類の材料（熱伝導率 λ_5 [W/(m・℃)]、厚さ L_5 [m]）を加えて、Q を $10\ \mathrm{W/m^2}$ 以下に抑えたい。式 (5) を用いて、条件を満たす式を求めると以下のようになる。

$$10 \geq \frac{t_o - t_r}{\frac{1}{20}+\sum_{i=1}^{5}\frac{L_i}{\lambda_i}+\frac{1}{10}} = \frac{t_o - t_r}{\frac{1}{20}+\sum_{i=1}^{4}\frac{L_i}{\lambda_i}+\frac{L_5}{\lambda_5}+\frac{1}{10}}$$

この式に、$t_o = 34\ ℃, t_r = 24\ ℃$ の条件と、表１から $\sum_{i=1}^{4}\frac{L_i}{\lambda_i}$ の計算値を代入する。

$$10 \geq \frac{10}{0.05+0.19+\frac{L_5}{\lambda_5}+0.1} = \frac{10}{0.34+\frac{L_5}{\lambda_5}}$$

$$\Rightarrow 0.34 + \frac{L_5}{\lambda_5} \geq 1$$

$$\Rightarrow \frac{L_5}{\lambda_5} \geq 1 - 0.34 = 0.66$$

$$\Rightarrow L_5 \geq \mathbf{0.66}\ \lambda_5 \qquad (6)$$

この式で L_5 と λ_5 の関係が求められる。ここで、壁全体の厚さを $0.21\ \mathrm{m}$ とすると、$L_1 + \cdots + L_4 = 0.16$ より、追加する材料の厚さ L_5 は $0.21 - 0.16 = \mathbf{0.05}\ \mathrm{m}$ となる。この値を式 (6) に代入して λ_5 の条件を求める。

$$0.05 \geq \mathbf{0.66}\ \lambda_5 \Rightarrow \lambda_5 \leq \frac{0.05}{0.66} \sim 0.075$$

表２から、上の λ_5 の条件を満たし、利用可能な材料を選ぶと、**A, B** である。

このように、熱伝導率の低い材料を加えると、壁の厚さを大幅に増すことなく、室内への熱の侵入を抑えられ、エネルギーが削減できる。

問３の正解

ク	ケ	コ
3	**2**	**3**