

## 2018 年度センター試験 数学 I 解説

### 第 1 問

[1]

(1)  $x$  を実数とし

$$A = x(x+1)(x+2)(5-x)(6-x)(7-x)$$

とおく。整数  $n$  に対して

$$\begin{aligned}(x+n)(n+5-x) &= nx + x(5-x) + n^2 + n(5-x) \\ &= x(5-x) + n^2 + 5n\end{aligned}$$

である。

$$A = x(5-x) \times (x+1)(6-x) \times (x+2)(7-x)$$

と書き直すと

$$\begin{aligned}(x+1)(6-x) &= x(5-x) + 6 \\ (x+2)(7-x) &= x(5-x) + 14\end{aligned}$$

となる。したがって、 $X = x(5-x)$  とおくと

$$A = X(X+6)(X+14)$$

と表せる。

$x = \frac{5+\sqrt{17}}{2}$  のとき、

$$X = \frac{5+\sqrt{17}}{2} \times \left(5 - \frac{5+\sqrt{17}}{2}\right) = \frac{5+\sqrt{17}}{2} \times \frac{5-\sqrt{17}}{2} = 2$$

である。よって、

$$\begin{aligned}
 A &= 2 \times (2 + 6) \times (2 + 14) \\
 &= 2 \times 2^3 \times 2^4 \\
 &= 2^8
 \end{aligned}$$

である。

(2) 実数  $x$  が

$$(x + 1)(x + 2)(6 - x)(7 - x) = -16$$

を満たすとき、 $X = x(5 - x)$  とおくと

$$(x + 1)(x + 2)(6 - x)(7 - x) = (X + 6)(X + 14)$$

と表せるため、 $X$  は

$$(X + 6)(X + 14) = -16$$

を満たす。この  $X$  の二次方程式を解くと、

$$X^2 + 20X + 100 = (X + 10)^2 = 0 \Rightarrow X = -10$$

つまり、 $x(5 - x) = -10$  である。したがって、このとき  $x$  の値は

$$x^2 - 5x - 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{65}}{2}$$

である。

[ 1 ] の正解

|   |   |    |   |   |     |   |    |   |
|---|---|----|---|---|-----|---|----|---|
| ア | イ | ウエ | オ | カ | キクケ | コ | サシ | ス |
| 5 | 6 | 14 | 2 | 7 | -10 | 5 | 65 | 2 |

[2]

(1) 全体集合  $U$  を  $U = \{x \mid x \text{ は } 20 \text{ 以下の自然数}\}$  とし、次の部分集合  $A, B, C$  を考える。

$$A = \{x \mid x \in U \text{ かつ } x \text{ は } 20 \text{ の約数}\}$$

$$B = \{x \mid x \in U \text{ かつ } x \text{ は } 3 \text{ の倍数}\}$$

$$C = \{x \mid x \in U \text{ かつ } x \text{ は偶数}\}$$

集合  $A$  の補集合を  $\overline{A}$  と表し、空集合を  $\emptyset$  と表す。

これらの集合対して、2つの関係の正誤を考える。

(a) 「 $A \subset C$ 」という関係。実際に  $A$  の要素を書き上げると

$$A = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$$

となる。この中で  $1$  と  $5$  は偶数でないため  $C$  の要素ではない。つまり  $A \subset C$  という関係は誤である

(b) 「 $A \cap B = \emptyset$ 」という関係。先ほどの集合  $A$  の要素の中に  $3$  の倍数は入っていない。つまりつまり  $A \cap B = \emptyset$  という関係は正である。

また、 $A \cap B$  に属する要素は  $3$  の倍数であり、かつ  $20$  の約数である。つまり  $20$  を割り切ることができる  $3$  の倍数となるため、 $20$  が  $3$  の倍数であることになるため、矛盾が起きる。このことから  $A \cap B$  には要素が含まれないことがわかる。

以上から、求める正誤の組合せは ② の「(a) 誤 (b) 正」である。

(c) 「 $(A \cup C) \cap B = \{6, 12, 18\}$ 」という関係。左辺に対して分配法則を使うと

$$(A \cup C) \cap B = (A \cap B) \cup (C \cap B)$$

となる。しかし、(b) で  $A \cap B = \emptyset$  という関係が成り立つため、

$$(A \cup C) \cap B = \emptyset \cup (C \cap B) = C \cap B$$

となる。 $C \cap B$  という集合は 20 以下の自然数で、3 の倍数かつ偶数からなる。つまり、20 以下の自然数で 6 の倍数からなるため、

$$(A \cup C) \cap B = \{6, 12, 18\}$$

よって、この関係は正である。

- (d) 「 $(\bar{A} \cap C) \cup B = \bar{A} \cap (B \cup C)$ 」という関係。左辺の式に対して分配法則を使うと

$$(\bar{A} \cap C) \cup B = (\bar{A} \cup B) \cap (C \cup B)$$

となる。ここで  $A \cap B = \emptyset$  という関係から、 $B \subset \bar{A}$  という関係が成り立つ。よって、 $\bar{A} \cup B = \bar{A}$  であるため、

$$(\bar{A} \cap C) \cup B = \bar{A} \cap (C \cup B) = \bar{A} \cap (B \cup C)$$

となり、関係は正である。以上から、求める正誤の組合せは ㊦ の「(c) 正 (d) 正」である。ちなみに、

$$(\bar{A} \cap C) \cup B = \{6, 8, 9, 12, 14, 15, 16, 18\}$$

である。

- (2) 実数  $x$  に関する次の条件  $p, q, r, s$  を考える。

$$p : |x - 2| > 2, \quad q : x < 0, \quad r : x > 4, \quad s : \sqrt{x^2} > 4$$

条件  $p$  を満たす  $x$  の範囲は

$$|x - 2| > 2 \Leftrightarrow x - 2 < -2, 2 < x - 2 \Leftrightarrow x < 0, 4 < x$$

となる。また、条件  $s$  の式について

$$x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} = x, \quad x < 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} = -x$$

となるため、

$$\sqrt{x^2} > 4 \Leftrightarrow |x| > 4 \Leftrightarrow x < -4, 4 < x$$

が成り立つ。

「 $q$  または  $r$  である」という条件を満たす  $x$  の範囲は  $x < 0, 4 < x$  である。この範囲は条件  $p$  を満たす範囲と一致する。よって  $q$  または  $r$  であることは  $p$  であるための ② 必要十分条件である。

また、条件  $s$  を満たす範囲  $x < -4, 4 < x$  は条件  $r$  を満たす範囲  $x > 4$  を含んではいるが、逆に含まれてはいない。よって  $s$  は  $p$  であるための ① 必要条件ではあるが、十分条件ではない。

[ 2 ] の正解

| セ | ソ | タ | チ |
|---|---|---|---|
| 2 | 0 | 2 | 0 |