

2017 年度センター試験 数学 I 解説

第 3 問

$\triangle ABC$ において、 $AB = 6$, $BC = \sqrt{21}$, $AC = 3$ とする。

(1) 余弦定理から、

$$\cos \angle BAC = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{36 + 9 - 21}{2 \cdot 6 \cdot 3} = \frac{2}{3}$$

$$\sin \angle BAC = \sqrt{1 - (\cos \angle BAC)^2} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

である。

(2) 点 C から辺 AB に下ろした垂線を CH とするとき、

$$AH = AB \times \cos \angle BAC = 2$$

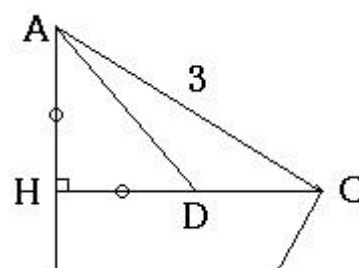
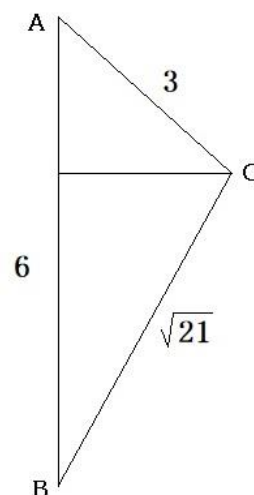
$$CH = AB \times \sin \angle BAC = \sqrt{5}$$

である。また、線分 CH 上に $AH = HD$ を満たす点 D をとるとき（下の図はわかりやすくするため、距離を替えている）、 $\triangle ADH$ は直角二等辺三角形になるため、

$$AD = AH \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}, \quad CD = CH - HD = \sqrt{5} - 2$$

である。したがって、

$$\triangle ACD \text{ の面積} = \frac{1}{2} \times CD \times AH = \sqrt{5} - 2$$



また $\triangle ACD$ の面積 $= AC \times AD \times \sin \angle CAD / 2$ であることから

$$\sin \angle CAD = \frac{2 \times \triangle ACD \text{の面積}}{AC \times AD} = \frac{2 \times (\sqrt{5} - 2)}{3 \times 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10} - 2\sqrt{2}}{6}$$

である。 $\triangle ACD$ の外接円の半径を R とする。正弦定理を使うと

$$2R = \frac{CD}{\sin \angle CAD} = (\sqrt{5} - 2) \times \frac{6}{\sqrt{10} - 2\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} \Rightarrow R = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

となる。

また、辺 AB の中点を E とし、直線 AD と辺 BC の交点を F とする。二つの三角形 $\triangle ACF$, $\triangle AEF$ について、

$$\triangle ACF \text{の面積} = \frac{1}{2} \times AC \times AF \times \sin \angle CAF$$

$$\triangle AEF \text{の面積} = \frac{1}{2} \times AE \times AF \times \sin \angle EAF$$

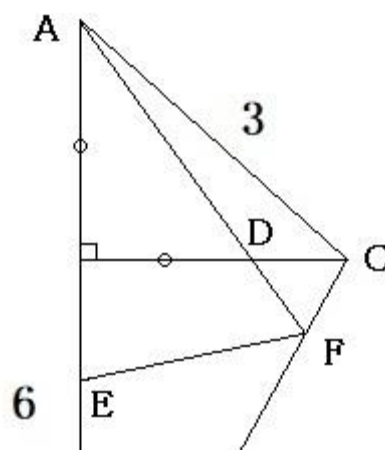
である。点 E は辺 AB の中点であるため $AE = 3 = AC$ 。よって、

$$\frac{\triangle ACF \text{の面積}}{\triangle AEF \text{の面積}} = \frac{\sin \angle CAF}{\sin \angle EAF}$$

である。上の式の角について、 $\angle CAF = \angle CAD$ であり、 $\triangle AHD$ は直角二等辺

三角形であるため $\sin \angle EAF = \sin \angle DAH = \sqrt{2}/2$ 。以上から

$$\frac{\triangle ACF \text{の面積}}{\triangle AEF \text{の面積}} = \frac{(\sqrt{10} - 2\sqrt{2})/6}{\sqrt{2}/2} = \frac{\sqrt{5} - 2}{3}$$



第 3 問の正解

ア	イ	ウ	エ	オ
2	3	5	3	2
カ	キ	ク	ケ	コ
5	2	2	5	2
サ	シ	スセ	ソ	タ
5	2	10	2	2
チ	ツ	テ	ト	ナ
6	3	2	2	5
ニ	ヌ			
2	3			