

2017年度センター試験 数学IA解説

第1問

[3] a を正の実数とし、

$$f(x) = ax^2 - 2(a+3)x - 3a + 21$$

とする。この式を変形すると

$$\begin{aligned} f(x) &= a\left(x^2 - 2\frac{a+3}{a}x\right) - 3a + 21 \\ &= a\left(x - \frac{a+3}{a}\right)^2 - \frac{(a+3)^2}{a} - 3a + 21 \end{aligned}$$

となるため、2次関数 $y = f(x)$ のグラフの頂点の x 座標 p は

$$p = \frac{a+3}{a} = 1 + \frac{3}{a}$$

である。

- (1) $0 \leq x \leq 4$ における関数 $y = f(x)$ の最小値が $f(4)$ であるとき、この区間において関数 $y = f(x)$ は減少関数であることが必要十分条件である。よって、この関数のグラフにおいて、頂点の x 座標 p は 4 以上である。つまり

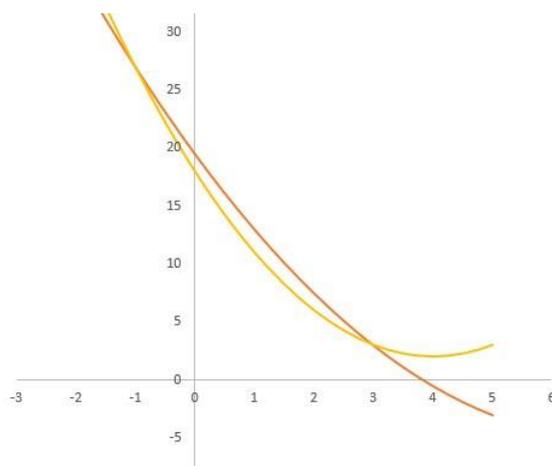
$$p = 1 + \frac{3}{a} \geq 4 \Leftrightarrow \frac{3}{a} \geq 3 \Leftrightarrow a \leq 1$$

である。このことから求める範囲は

$$0 < a \leq 1$$

である。

(右のグラフは $a = 1/2, 1$ のときの関数を Excel を使い描いたもの。赤の線は $a = 1/2$ のときで、 $x = 7$ が軸である。オレンジの線は $a = 1$ のときで、 $a = 4$ が軸である。)



また、 $0 \leq a \leq 4$ における関数 $y = f(x)$ の最小値が $f(p)$ であるときを考える。この関数は $x \leq p$ では減少、 $x \geq p$ では増加している。つまり、上記の条件が成り立つためには、 $0 \leq p \leq 4$ であることが必要十分条件になる。さらに $a > 0$ より

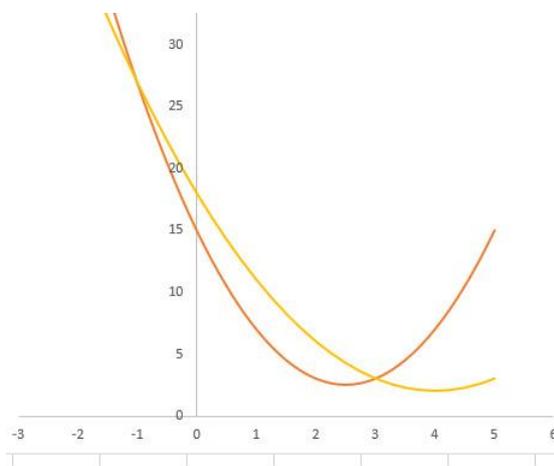
$$p = 1 + \frac{3}{a} > 1$$

となるため、 $1 < p \leq 4$ が成り立つ。以上から求める a の範囲は

$$1 < p = 1 + \frac{3}{a} \leq 4 \Leftrightarrow 0 < \frac{3}{a} \leq 3 \Leftrightarrow 1 \leq a$$

である。

(右のグラフは $a = 2, 1$ のときの関数を Excel を使い描いたもの。赤の線は $a = 2$ のときで、 $x = 5/2$ が軸である。オレンジの線は $a = 1$ のときで、 $a = 4$ が軸である。)



以上のことから、 $0 \leq a \leq 4$ における関数 $y = f(x)$ の最小値が 1 となる a の値を求める。

$0 < a \leq 1$ であるとき、 $0 \leq a \leq 4$ における最小値は $f(4)$ である。

$$f(4) = 16a - 2(a+3) \times 4 - 3a + 21 = 5a - 3$$

であることから、

$$f(4) = 5a - 3 = 1 \Rightarrow a = \frac{4}{5}$$

この値は $0 < a \leq 1$ の範囲に入っている。

$a \geq 1$ であるとき、 $0 \leq a \leq 4$ における最小値は $f(p)$ である。

$$f(p) = -\frac{(a+3)^2}{a} - 3a + 21$$

であることから、

$$\begin{aligned} f(p) = 1 &\Rightarrow -(a+3)^2 - 3a^2 + 21a = a \\ &\Rightarrow -4a^2 + 14a - 9 = 0 \\ &\Rightarrow a = \frac{-14 \pm \sqrt{52}}{-8} = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{4} \end{aligned}$$

このうち $a \geq 1$ の範囲に入っている値は $a = (7 + \sqrt{13})/4$ のみである。残

りの値は $(7 - \sqrt{13})/4 \sim 0.85 < 1$ となり、範囲に入らない。

したがって、 $0 \leq a \leq 4$ における関数 $y = f(x)$ の最小値が 1 となる a の値は

$$a = \frac{4}{5}, \quad a = \frac{7 + \sqrt{13}}{4}$$

のときである。

[3] の正解

サ	シ	ス	セ	ソ
1	3	1	1	4
タ	チ	ツテ	ト	
5	7	13	4	