

2018 年度センター試験 数学 IA 解説

第 1 問

[1]

(1) x を実数とし

$$A = x(x+1)(x+2)(5-x)(6-x)(7-x)$$

とおく。整数 n に対して

$$\begin{aligned}(x+n)(n+5-x) &= nx + x(5-x) + n^2 + n(5-x) \\ &= x(5-x) + n^2 + 5n\end{aligned}$$

である。

$$A = x(5-x) \times (x+1)(6-x) \times (x+2)(7-x)$$

と書き直すと

$$\begin{aligned}(x+1)(6-x) &= x(5-x) + 6 \\ (x+2)(7-x) &= x(5-x) + 14\end{aligned}$$

となる。したがって、 $X = x(5-x)$ とおくと

$$A = X(X+6)(X+14)$$

と表せる。

$x = \frac{5+\sqrt{17}}{2}$ のとき、

$$X = \frac{5+\sqrt{17}}{2} \times \left(5 - \frac{5+\sqrt{17}}{2}\right) = \frac{5+\sqrt{17}}{2} \times \frac{5-\sqrt{17}}{2} = 2$$

である。よって、

$$\begin{aligned}
 A &= 2 \times (2 + 6) \times (2 + 14) \\
 &= 2 \times 2^3 \times 2^4 \\
 &= 2^8
 \end{aligned}$$

である。

[1] の正解

ア	イ	ウエ	オ	カ
5	6	14	2	7

[2]

(1) 全体集合 U を $U = \{x \mid x \text{ は } 20 \text{ 以下の自然数}\}$ とし、次の部分集合 A, B, C を考える。

$$A = \{x \mid x \in U \text{ かつ } x \text{ は } 20 \text{ の約数}\}$$

$$B = \{x \mid x \in U \text{ かつ } x \text{ は } 3 \text{ の倍数}\}$$

$$C = \{x \mid x \in U \text{ かつ } x \text{ は偶数}\}$$

集合 A の補集合を $\overline{A}$ と表し、空集合を $\emptyset$ と表す。

これらの集合対して、2つの関係の正誤を考える。

(a) 「 $A \subset C$ 」という関係。実際に A の要素を書き上げると

$$A = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$$

となる。この中で 1 と 5 は偶数でないため C の要素ではない。つまり $A \subset C$ という関係は誤である

(b) 「 $A \cap B = \emptyset$ 」という関係。先ほどの集合 A の要素の中に 3 の倍数は入っていない。つまりつまり $A \cap B = \emptyset$ という関係は正である。

また、 $A \cap B$ に属する要素は 3 の倍数であり、かつ 20 の約数である。つまり 20 を割り切ることができる 3 の倍数となるため、 20 が 3 の倍数であることになるため、矛盾が起きる。このことから $A \cap B$ には要素が含まれないことがわかる。

以上から、求める正誤の組合せは ② の「(a) 誤 (b) 正」である。

(c) 「 $(A \cup C) \cap B = \{6, 12, 18\}$ 」という関係。左辺に対して分配法則を使うと

$$(A \cup C) \cap B = (A \cap B) \cup (C \cap B)$$

となる。しかし、(b) で $A \cap B = \emptyset$ という関係が成り立つため、

$$(A \cup C) \cap B = \emptyset \cup (C \cap B) = C \cap B$$

となる。 $C \cap B$ という集合は 20 以下の自然数で、3 の倍数かつ偶数からなる。つまり、20 以下の自然数で 6 の倍数からなるため、

$$(A \cup C) \cap B = \{6, 12, 18\}$$

よって、この関係は正である。

- (d) 「 $(\bar{A} \cap C) \cup B = \bar{A} \cap (B \cup C)$ 」という関係。左辺の式に対して分配法則を使うと

$$(\bar{A} \cap C) \cup B = (\bar{A} \cup B) \cap (C \cup B)$$

となる。ここで $A \cap B = \emptyset$ という関係から、 $B \subset \bar{A}$ という関係が成り立つ。よって、 $\bar{A} \cup B = \bar{A}$ であるため、

$$(\bar{A} \cap C) \cup B = \bar{A} \cap (C \cup B) = \bar{A} \cap (B \cup C)$$

となり、関係は正である。以上から、求める正誤の組合せは ㊦ の「(c) 正 (d) 正」である。ちなみに、

$$(\bar{A} \cap C) \cup B = \{6, 8, 9, 12, 14, 15, 16, 18\}$$

である。

- (2) 実数 x に関する次の条件 p, q, r, s を考える。

$$p : |x - 2| > 2, \quad q : x < 0, \quad r : x > 4, \quad s : \sqrt{x^2} > 4$$

条件 p を満たす x の範囲は

$$|x-2|>2 \Leftrightarrow x-2<-2, 2<x-2 \Leftrightarrow x<0, 4<x$$

となる。また、条件 s の式について

$$x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} = x, \quad x < 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} = -x$$

となるため、

$$\sqrt{x^2} > 4 \Leftrightarrow |x| > 4 \Leftrightarrow x < -4, 4 < x$$

が成り立つ。

「 q または r である」という条件を満たす x の範囲は $x < 0, 4 < x$ である。この範囲は条件 p を満たす範囲と一致する。よって q または r であることは p であるための ② 必要十分条件である。

また、条件 s を満たす範囲 $x < -4, 4 < x$ は条件 r を満たす範囲 $x > 4$ を含んではいるが、逆に含まれてはいない。よって s は p であるための ① 必要条件ではあるが、十分条件ではない。

[2] の正解

キ	ク	ケ	コ
2	0	2	0