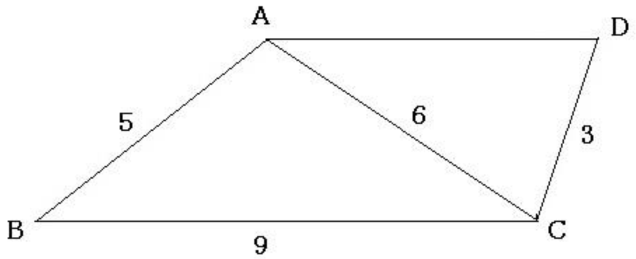
2017年度センター試験　数学IA解説

第2問

［1］ 四角形 ABC において、3 辺の長さをそれぞれ $AB=5,\ BC=9,$ $CD=3$ とする。対角線 AC の長さを $AC=6$ とする。



余弦定理から、

$$\cos\angle ABC=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2\cdot AB\cdot BC}=\frac{25+81-36}{2\cdot 5\cdot 9}=\boldsymbol{\frac{7}{9}}$$

$$\sin\angle ABC=\sqrt{1-(\cos\angle ABC)^2}=\sqrt{\frac{32}{81}}=\boldsymbol{\frac{4\sqrt{2}}{9}}$$

である。

四角形 $ABCD$ が台形であるとき

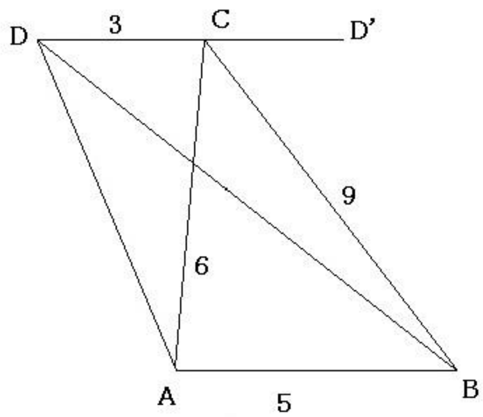
「辺 AD と辺 BC が平行」または「辺 AB と辺 CD が平行」

が成り立つ。「辺 AD と辺 BC が平行」であると仮定すると、2 点 $A,\ D$ と辺 BC との距離は等しくなる。点 D と辺 BC との距離は $AB\cdot\sin\angle ABC$ であるため、点 C と辺 BC との距離もこの値である。辺 CD の長さとこの距離を比較すると

$$CD = 3\text{「}<\text{」}AB \cdot \sin\angle ABC = 5 \times \frac{4\sqrt{2}}{9} = \frac{20\sqrt{2}}{9} \sim 3.14$$

となり、CD の長さより長くなり矛盾が起きる。よって、四角形 $ABCD$ が台形であるとき「**辺 $\boldsymbol{AB}$ と辺 $\boldsymbol{CD}$ が平行**」である。

このことから、BD の長さを求める。線分 CD を点 C の方向に延長して線分 CD' を引く。このとき辺 AB と辺 CD が平行であることから



$$\begin{aligned}\angle BCD &= 180^\circ - \angle BCD' \\ &= 180^\circ - \angle CBA\end{aligned}$$

である。したがって、

$$\cos\angle BCD = -\cos\angle CBA = -\frac{7}{9}$$

である。以上から余弦定理を使い、

$$\begin{aligned}BD^2 &= BC^2 + CD^2 - 2\cos\angle BCD \cdot BC \cdot CD \\ &= 9 + 81 - 2 \cdot -\frac{7}{9} \cdot 3 \cdot 9 \\ &= 132\end{aligned}$$

となり、$BC = \sqrt{132} = \boldsymbol{2\sqrt{33}}$ である。

第 3 問の正解

ア	イ	ウ	エ	オ
7	**9**	**4**	**2**	**9**
カ	キ	ク	ケコ	
0	**4**	**2**	**33**	