

2017 年度センター試験 数学 IA 解説

第 4 問

(1) 144 を素因数分解すると

$$\begin{aligned} 144 &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \\ &= 2^4 \times 3^2 \end{aligned}$$

であり、144 の正の約数は

$$2^a \times 3^b \quad (0 \leq a \leq 4, \quad 0 \leq b \leq 2)$$

という形で表されるため、正の約数の個数は $(4 + 1) \times (2 + 1) = 15$ 個である。

(2) 不定方程式

$$144x - 7y = 1$$

の整数解 x, y の中で、 x の絶対値が最小になるものを求める。

・ x の絶対値が 0 である、つまり $x = 0$ のとき、 $-7y = 1$ を満たす整数解 y は存在しない。

・ x の絶対値が 1 である、つまり $x = \pm 1$ のとき、

$$\pm 144 - 7y = 1 \Rightarrow 7y = 143, -145$$

を満たす整数解 y は存在しない。

・ x の絶対値が 2 のとき、 $x = 2$ とすると、

$$288 - 7y = 1 \Rightarrow 7y = 287 \Rightarrow y = 41$$

となり、整数解 y が存在する。一方 $x = -2$ とすると、

$$-288 - 7y = 1 \Rightarrow 7y = -289$$

を満たす整数解 y は存在しない。よって求める整数解は

$$x = 2, \quad y = 41$$

である。また、2つの整数 x_0, y_0 に対して、 $x = 2 + x_0, y = 41 + y_0$ が上の不定方程式の整数解であるとき、

$$\begin{aligned} 144(2 + x_0) - 7(41 + y_0) &= 1 \Rightarrow 144x_0 - 7y_0 = 0 \\ &\Rightarrow 144x_0 = 7y_0 \end{aligned}$$

となる。2つの整数 $144, 7$ は互いに素であるため、整数 k を使い

$$x_0 = 7k, \quad y_0 = 144k$$

と表される。よって上の不定方程式のすべての整数解は

$$x = 7k + 2, \quad y = 144k + 41$$

と表される。

(3) 144 の倍数で、 7 で割ったら余りが 1 となる自然数について考える。自然数 x に対して、 $144x$ を 7 で割ったら余りが 1 となるとき、ある整数 y により、

$$144x = 7y + 1 \Leftrightarrow 144x - 7y = 1$$

となり、 x, y は (2) の不定方程式を満たす。逆にこの不定方程式を満たす自然数 x と整数 y に対して、 $144x$ は 7 で割ったら余りが 1 となる。

さらに、(2) の結果から、整数 k に対して、 $144(7k + 2)$ は 7 で割ったら余りが 1 となることもわかる。

x を自然数としているため、 $k = 0, 1, 2, \dots$ の順で $144(2 + 7k)$ の正の約数の個数を求めると以下の通りになる。

k	$2 + 7k$	$144(2 + 7k)$	正の約数の個数
0	2	$2^5 \times 3^2$	$6 \times 3 = 18$
1	9	$2^4 \times 3^4$	$5 \times 5 = 25$
2	16	$2^8 \times 3^2$	$9 \times 3 = 27$
3	23	$2^4 \times 3^2 \times 23$	$5 \times 3 \times 2 = 30$

以上から 144 の倍数で、7 で割ったら余りが 1 となる自然数のうち、正の約数の個数が 18 個である最小の数は 144×2 であり、正の約数の個数が 30 個である最小の数は 144×23 である。

第 3 問の正解

ア	イ	ウ	エオ	カ
4	3	2	15	2
キク	ケ	コサシ	ス	セソ
41	7	144	2	23