

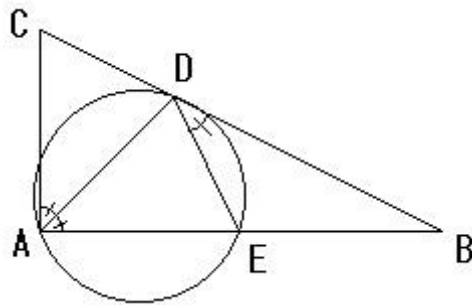
2017 年度センター試験 数学 IA 解説

第 5 問

(1) $\triangle ABC$ において $AB = 2, AC = 1, \angle A = 90^\circ$ とする。このとき

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{5}$$

である。



$\angle A$ の二等分線と辺 BC との交点を D とすると、

$$BD : DC = BA : AC = 2 : 1$$

であることから、

$$BD = \frac{2}{2+1} \times BC = \frac{2\sqrt{5}}{3}$$

である。

点 A を通り点 D で辺 BC に接する円と辺 AB との交点で A と異なるものを E とする。このとき $\triangle ABD$ と $\triangle DBE$ について、

$$\angle ABD = \angle EBD, \quad \angle BAD = \angle EDB$$

であるため、 $\triangle ABD$ と $\triangle DBE$ は相似である。よって、

$$BE : BD = BD : AB \Rightarrow AB \cdot BE = BD^2 = \frac{20}{9}$$

となり

$$BE = \frac{20}{9} \times \frac{1}{AB} = \frac{10}{9}$$

である。

ここで BE/BD と AB/BC を比較すると

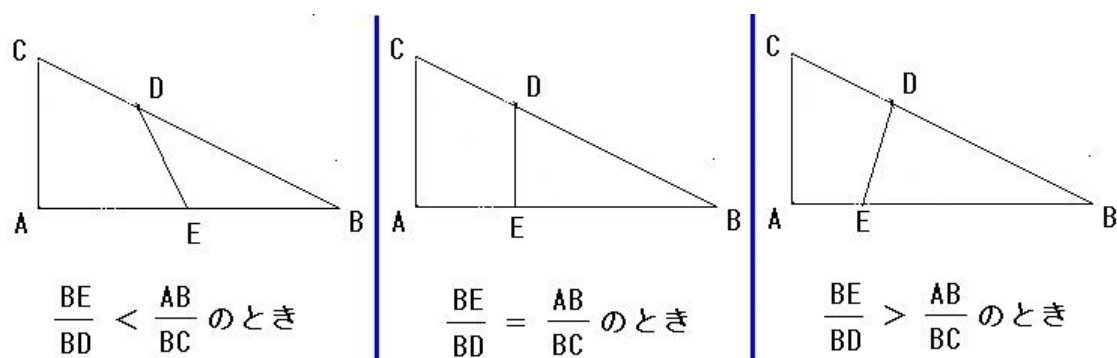
$$\frac{BE}{BD} = \frac{10}{9} / \frac{2\sqrt{5}}{3} = \frac{10}{9} \times \frac{3}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{3} \left(= \frac{5\sqrt{5}}{15} \right)$$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \left(= \frac{6\sqrt{5}}{15} \right)$$

となるため、 $\frac{BE}{BD} < \frac{AB}{BC}$ が成り立つ。このことから、

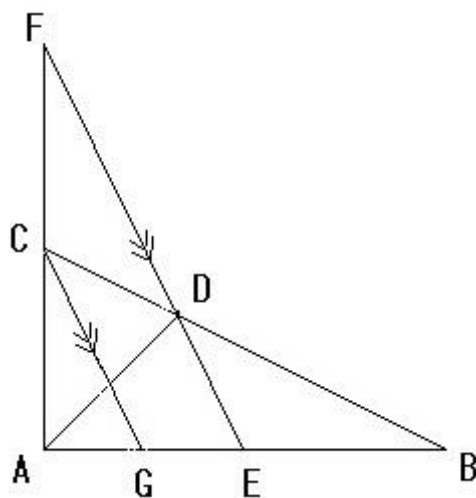
$$\frac{BE}{BD} < \frac{AB}{BC} \Rightarrow \angle BED > 90^\circ$$

がわかるため、直線 AC と直線 ED の交点は辺 AC の端点 C の側の延長上にある。



先ほどの直線 AC と直線 ED の交点を F とする。また C を通り EF に

平行な直線と辺 AB との交点を G とする。



このとき、

$$BE : EG = BD : DC = 2 : 1 \Rightarrow EG = \frac{1}{2} \times BE = \frac{5}{9}$$

よって、

$$\frac{CF}{AF} = \frac{5}{9} / \frac{8}{9} = \frac{5}{8}$$

であるから、

$$CF = AF \times \frac{5}{8} = (1 + CF) \times \frac{5}{8} \Rightarrow CF = \frac{5}{3}$$

である。

以上から $AF = 1 + \frac{5}{3} = \frac{8}{3}$ となるため、

$$BF = \sqrt{AB^2 + AF^2} = \sqrt{2^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{100}{9}} = \frac{10}{3}$$

このことから

$$\frac{CF}{AC} = \frac{5}{3}, \quad \frac{BF}{AB} = \frac{10}{3} / 2 = \frac{5}{3}$$

となり、二つの値が等しいことがわかる。

これは直線 BC が $\angle ABF$ の二等分線であることを示している。三角形 ABF において点 D は $\angle BAF$ の二等分線 AD と $\angle ABF$ の二等分線 BC との交点であることがわかるため、点 D は三角形 ABF の内心である。

第5問の正解

ア	イ	ウ	エオ	カ
2	5	3	20	9
キク	ケ	コ	サ	シ
10	9	0	4	5
ス	セ	ソ	タ	
8	5	3	1	