

## 2018 年度センター試験 数学 2 解説

### 第 1 問

[1]

- (1) 一定の半径において、扇形の「弧の長さ」と「中心角の大きさ」は比例する。このことから、半径が 1 の扇形を基準に中心角の大きさを「弧の長さ」で表す方法が「弧度法」と呼ばれるものである。

弧度法の基準となる角度が「半径 1、弧の長さが 1 の扇形の中心角の大きさ」であり、この値を「1 ラジアン」と呼ぶ。

- (2) 半径 1 の円の弧の長さ、つまり円周は  $2\pi$  であるため、 $360^\circ$  を弧度で表すと  $2\pi$  ラジアンである。比例の関係から角度と弧度の対応を求めていく。 $144^\circ$  の弧度を  $\alpha$  ラジアンとすると

$$360^\circ : 2\pi = 144^\circ : \alpha \Rightarrow \alpha = 2\pi \times \frac{144}{360} = \frac{4}{5}\pi$$

である。また、 $\frac{23}{12}\pi$  ラジアンの角度を  $b^\circ$  とすると

$$360^\circ : 2\pi = b^\circ : \frac{23}{12}\pi \Rightarrow b = 360 \times \frac{23}{12} \times \frac{1}{2\pi} = 345$$

である。

(3)  $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$  の範囲で

$$2 \sin \left( \theta + \frac{\pi}{5} \right) - 2 \cos \left( \theta + \frac{\pi}{30} \right) = 1 \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

を満たす  $\theta$  の値を求めよう。

$x = \theta + \frac{\pi}{5}$  とおくと、

$$\theta + \frac{\pi}{30} = \theta + \frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{6} = x - \frac{\pi}{6}$$

となることから、 $\textcircled{1}$  は

$$2 \sin x - 2 \cos \left( x - \frac{\pi}{6} \right) = 1$$

と表せる。加法定理を用いると

$$\begin{aligned} \cos \left( x - \frac{\pi}{6} \right) &= \cos x \cos \left( -\frac{\pi}{6} \right) - \sin x \sin \left( -\frac{\pi}{6} \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x \end{aligned}$$

であることから上の式は

$$2 \sin x - \sqrt{3} \cos x - \sin x = \sin x - \sqrt{3} \cos x = 1$$

となる。さらに

$$\sin x - \sqrt{3} \cos x = 2 \left( \frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \left( \sin x \cos \frac{\pi}{3} - \cos x \sin \frac{\pi}{3} \right) \\
 &= 2 \sin \left( x - \frac{\pi}{3} \right)
 \end{aligned}$$

であることから

$$2 \sin \left( x - \frac{\pi}{3} \right) = 1 \Rightarrow \sin \left( x - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2}$$

と変形できる。

$$\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi, \quad x = \theta + \frac{\pi}{5}$$

であることから、 $x - \frac{\pi}{3}$  の範囲は

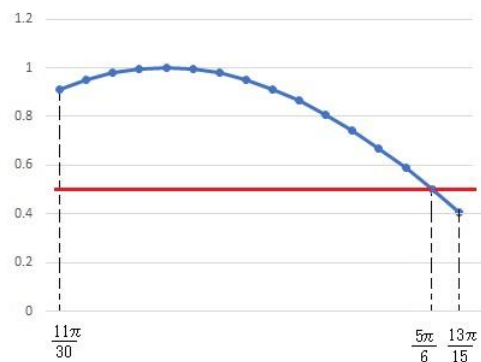
$$\frac{11}{30}\pi \leq x - \frac{\pi}{3} = \theta - \frac{2}{15}\pi \leq \frac{13}{15}\pi$$

である。この範囲で上の式を満たす値は

$$x - \frac{\pi}{3} = \frac{5}{6}\pi$$

のみ。

(右の図は、上の範囲での  $\sin \left( x - \frac{\pi}{3} \right)$  のグラフ。この範囲で  $\frac{1}{2}$  の値をとるのは、 $x - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$  のみであることがわかる)



よって

$$\theta = \frac{5}{6}\pi + \frac{2}{15}\pi = \frac{29}{30}\pi$$

である。

補足：求めた  $\theta$  の値を最初の式 ① に代入すると

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{7}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}, \cos\left(\theta + \frac{\pi}{30}\right) = \cos\pi = -1$$

であるため、① の等式が成り立つ。

[ 1 ] の正解

|          |          |          |            |           |
|----------|----------|----------|------------|-----------|
| ア        | イ        | ウ        | エオカ        | キ         |
| <b>2</b> | <b>4</b> | <b>5</b> | <b>345</b> | <b>6</b>  |
| ク        | ケ        | コ        | サシ         | スセ        |
| <b>3</b> | <b>3</b> | <b>2</b> | <b>29</b>  | <b>30</b> |

[2]

$c$  を正の定数として、不等式

$$x^{\log_3 x} \geq \left(\frac{x}{c}\right)^3 \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

を考える。

3 を底とする ② の両辺の対数をとると、大小関係は変わらないため

$$\log_3 x^{\log_3 x} \geq \log_3 \left(\frac{x}{c}\right)^3 \Rightarrow (\log_3 x)^2 \geq 3(\log_3 x - \log_3 c)$$

となる。 $t = \log_3 x$  とおくと

$$t^2 \geq 3(t - \log_3 c) \Rightarrow t^2 - 3t + 3\log_3 c \geq 0 \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

となる。ただし、対数  $\log_a b$  に対し、 $a$  を底といい、 $b$  を真数という。

$c = \sqrt[3]{9}$  のとき、② を満たす  $x$  の値の範囲を求めよう。③ に  $c = \sqrt[3]{9}$  を代入すると、

$$\log_3 \sqrt[3]{9} = \log_3 9^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \times \log_3 9 = \frac{2}{3}$$

より

$$t^2 - 3t + 2 = (t - 1)(t - 2) \geq 0 \Rightarrow t \leq 1, \quad t \geq 2$$

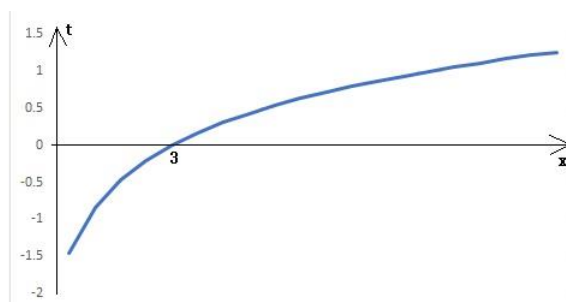
である。真数の条件から  $x > 0$  であるため、求める範囲は

$$t = \log_3 x \leq 1 \Rightarrow 0 < x \leq 3, \quad t \geq 2 \Rightarrow x \geq 9$$

となる。

次に、② が  $x > 0$  の範囲でつねに成り立つような  $c$  の値の範囲を求めよう。  
 が  $x > 0$  の範囲を動くとき、 $t = \log_3 x$  のとり得る値の範囲は「実数全体」である。つまり、

② が  $x > 0$  の範囲でつねに成り立つ  $\Leftrightarrow$  ③ がすべての実数  $t$  で成り立つ  
 となる。



$t = \log_3 x$  のグラフ

③ の右辺は

$$t^2 - 3t + 3\log_3 c = \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 3\log_3 c$$

と変形できるため、すべての実数  $t$  に対して、上の値が  $0$  以上であるための必要十分条件は

$$-\frac{9}{4} + 3\log_3 c \geq 0 \Leftrightarrow \log_3 c \geq \frac{3}{4}$$

でなければならない。したがって、

$$c \geq 3^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{3^3} = \sqrt[4]{27}$$

である。

[ 2 ] の正解

|          |           |          |          |          |
|----------|-----------|----------|----------|----------|
| ソ        | タ         | チ        | ツ        | テ        |
| <b>2</b> | <b>3</b>  | <b>1</b> | <b>2</b> | <b>0</b> |
| ト        | ナ         | ニ        | ヌ        | ネ        |
| <b>3</b> | <b>9</b>  | <b>2</b> | <b>3</b> | <b>4</b> |
| ノ        | ハヒ        |          |          |          |
| <b>4</b> | <b>27</b> |          |          |          |