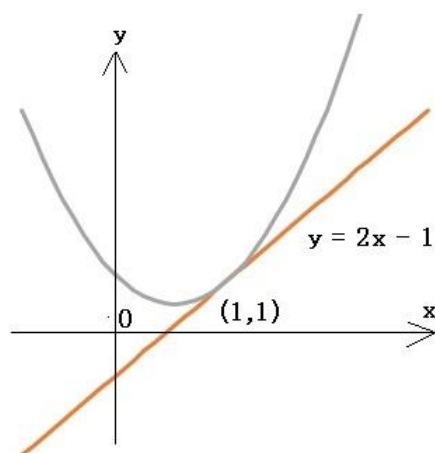


2018年度センター試験 数学Ⅱ解説

第2問

[1] $p > 0$ とする。座標平面上の放物線 $y = px^2 + qx + r$ を C とし、直線 $y = 2x - 1$ を l とする。 C は点 $A(1, 1)$ において l と接しているとする。



- (1) q と r を、 p を用いて表そう。放物線 C 上の点 A における接線 l の傾きは **2** である。放物線 C を x で微分すると

$$y' = 2px + q$$

このことから、

$$2p \times 1 + q = 2 \Rightarrow q = -2p + 2$$

である。さらに、 C は点 $A(1, 1)$ を通ることから、

$$\begin{aligned} p \times 1^2 + q \times 1 + r &= p + (-2p + 2) + r = 1 \\ \Rightarrow r &= -p - (-2p + 2) + 1 = p - 1 \end{aligned}$$

となる。

- (2) $v > 1$ とする。放物線 C と直線 l および直線 $x = v$ で囲まれた図形の

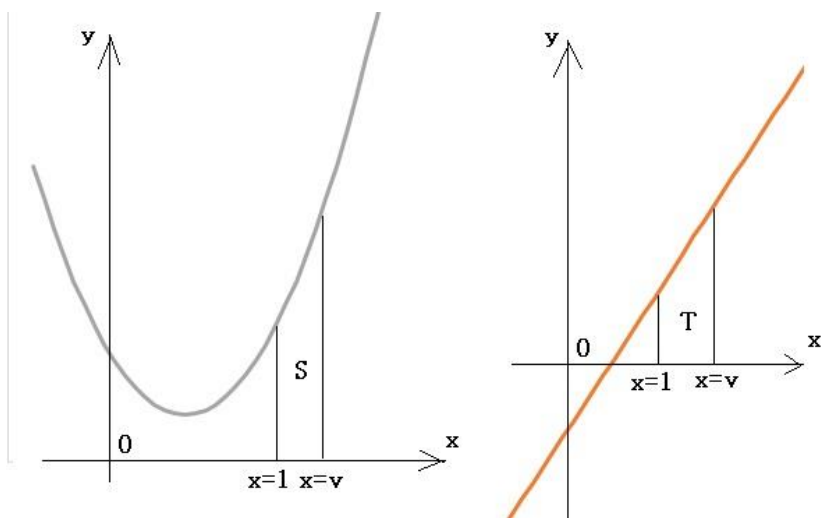
面積を求める。(1) より放物線 C の式は

$$y = p x^2 + (-2p + 2)x + (p - 1)$$

となることから、面積 S は

$$\begin{aligned} & \int_1^v \{p x^2 + (-2p + 2)x + (p - 1) - (2x - 1)\} dx \\ &= \int_1^v (p x^2 - 2px + p) dx \\ &= p \int_1^v (x - 1)^2 dx \\ &= p \left[\frac{1}{3} (x - 1)^3 \right]_1^v \\ &= \frac{p}{3} (v - 1)^3 \\ &= \frac{p}{3} (v^3 - 3v^2 + 3v - 1) \end{aligned}$$

である。



また、 x 軸と l および 2 直線 $x = 1, x = v$ で囲まれた図形の面積 T を求める。 l および 2 直線 $x = 1, x = v$ との交点はそれぞれ $(1, 1), (v, 2v - 1)$ であるため、

$$T = \frac{1}{2} \times (1 + 2v - 1) \times (v - 1) = v^2 - v$$

二つの面積 S, T について $U = S - T$ とする。

$$\begin{aligned} U &= \frac{p}{3}v^3 - pv^2 + pv - \frac{p}{3} - (v^2 - v) \\ &= \frac{p}{3}v^3 - (p + 1)v^2 + (p + 1)v - \frac{p}{3} \end{aligned}$$

この値が $v = 2$ で極値をとるとき、

$$\frac{dU}{dv} = pv^2 - 2(p + 1)v + (p + 1)$$

であることから、

$$4p - 4(p + 1) + (p + 1) = 0 \Rightarrow p = 3$$

である。このとき

$$U = v^3 - 4v^2 + 4v - 1 = (v - 1)(v^2 - 3v + 1)$$

となるため、

$$U = 0 \Rightarrow v = 1, \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

である。この中で $v > 1$ を満たす値 v_0 は $v_0 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ のみである。ちなみに $\frac{3-\sqrt{5}}{2} \cong 0.385 < 1$ である。
一方、

$$\frac{dU}{dv} = 3v^2 - 8v + 4 = 0 \Rightarrow v = 2, \frac{2}{3}$$

であり、 $2/3 < 1 < 2 < v_0$ となるため、 $2/3 < v < v_0$ の範囲での U の増減は以下の通りになる。

v	$2/3$	...	1	...	2	...	v_0
dU/dv	0	−	−	−	0	+	+
U	極値	+	0	−	極値	−	0

このことから、 $1 < v < v_0$ の範囲で U は負の値のみをとることがわかる。

$p = 3$ のとき、 $v > 1$ における U の最小値は $v = 2$ のときの

$$U = 2^3 - 4 \times 2^2 + 4 \times 2 - 1 = -1$$

である。

[1] の正解

ア	イウ	エ	オ	カ
2	−2	2	1	3
キ	ク	ケ	コ	サ
3	3	1	2	3
シ	ス	セ	ソ	タチ
3	5	2	3	−1

[2] 関数 $f(x)$ は $x \geq 1$ の範囲でつねに $f(x) \leq 0$ を満たすとする。 $t > 1$ のとき、曲線 $y = f(x)$ と x 軸および2直線 $x = 1, x = t$ で囲まれた図形の面積を W とする。 t が $t > 1$ の範囲を動くとき W は、底辺の長さが $2t^2 - 2$ 、他の2辺の長さがそれぞれ $t^2 + 1$ の二等辺三角形の面積とつねに等しいとする。このとき、 $x > 1$ における $f(x)$ を求めよう。

$F(x)$ を $f(x)$ の不定積分とする。つまり

$$F(x) = \int f(x) dx$$

であるため、

$$F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = f(x),$$

が成り立つ。また、関数 $f(x)$ は $x \geq 1$ の範囲でつねに $f(x) \leq 0$ であるため

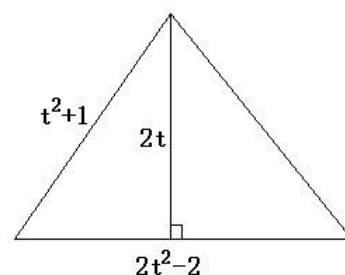
$$W = \int_1^t |f(x)| dx = \int_1^t -f(x) dx = [-F(x)]_1^t = -F(t) + F(1)$$

である。 W は、底辺の長さが $2t^2 - 2$ 、他の2辺の長さがそれぞれ $t^2 + 1$ の二等辺三角形の面積とつねに等しい。この二等辺三角形の高さは

$$\{(t^2 + 1)^2 - (t^2 - 1)^2\}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4t^2} = 2t$$

である。このことから、

$$W = \frac{1}{2} \times (2t^2 - 2) \times 2t = 2(t^3 - t)$$



よって、

$$F(t) = F(1) - W = -2t^3 + 2t + F(1)$$

$F(1)$ は定数であるため、 $t > 1$ において

$$f(t) = F'(t) = -6t^2 + 2$$

である。よって、 $x > 1$ における $f(x)$ がわかる。

[2] の正解

ツ	テ	トナ	ニ	ヌ
7	4	-6	2	2