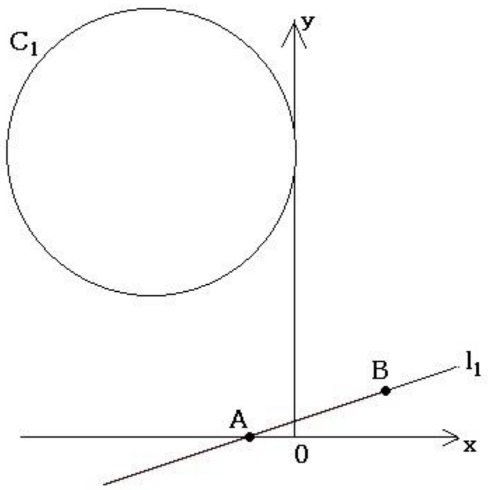
2018 年度センター試験　数学２解説

第３問

座標平面上の２点 $A(-1, 0)$, $B(2,1)$ を通る直線を l_1 とする。また、方程式 $x^2+y^2+6\,x-12\,y+36=0$ が表す円を C_1 とする。

(1)



l_1 の方程式を $x-\alpha y+\beta=0$ (α, β : 定数) とする。２点 A, B を通ることから

$$-1-\alpha\times 0+\beta=0 \Rightarrow \beta=1$$
$$2-\alpha\times 1+\beta=0 \Rightarrow \alpha-\beta=2 \Rightarrow \alpha=3$$

よって、l_1 の方程式は $x-\mathbf{3}y+\mathbf{1}=0$ である。また

$$\begin{aligned} & x^2+y^2+6\,x-12\,y+36=0 \\ \Leftrightarrow\ & x^2+6\,x+9+y^2-12\,y+36=9 \\ \Leftrightarrow\ & (x+3)^2+(y-6)^2=3^2 \end{aligned}$$

となるため、円 C_1 とは中心が $(\mathbf{-3}, \mathbf{6})$ 半径が $\mathbf{3}$ の円である。

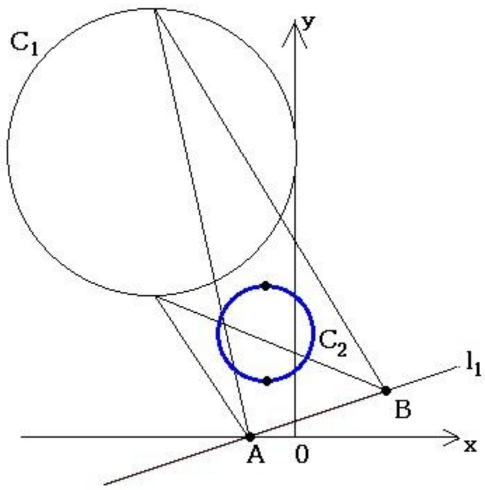
(2) C_1 上の点 $P(a,\ b)$ に対して、三角形 ABP の重心 G の座標を $(s,\ t)$ とおくと、

$$s=\frac{1}{3}(-1+2+a)=\frac{1}{3}(a+1),$$
$$t=\frac{1}{3}(0+1+b)=\frac{1}{3}(b+1)$$

が成り立つため、

$$a=\mathbf{3}\,s-\mathbf{1},\qquad b=\mathbf{3}\,t-\mathbf{1}$$

である。



このことから、P が C_1 上を動くとき、G の軌跡を求める。P は C_1 上の点であるため、

$$(a+3)^2+(b-6)^2=3^2$$

が成り立つ。この式の a,b それぞれに上の $s,\ t$ との関係式を代入すると

$$(3\,s+2)^2+(3\,t-7)^2=3^2$$
$$\Leftrightarrow\left(s+\frac{2}{3}\right)^2+\left(t-\frac{7}{3}\right)^2=1^2$$

となるため、点 $G(s,t)$ の軌跡は

$$\text{中心}\ \left(\frac{\mathbf{-2}}{\mathbf{3}},\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{3}}\right), \qquad \text{半径}\ \mathbf{1}$$

の円となる。

(3) (2) で求めた円を C_2 とする。点 Q が C_2 上を動き、点 R が線分 AB 上を動くとき、線分 QR の長さの最小値と最大値を求めよう。点 R を固定して、点 Q が C_2 上を動くときを考える。

円 C_2 の中心と点 R を通る直線を l とすると、線分 QR の長さが最小値をとるのは、C_2 と l の交点のうち R に近い点であり、線分 QR の長さが最大値をとるのは、C_2 と l の交点のうち R から遠い点である。よって、点 R を固定したとき、

線分 QR の長さの最小値 $=$ (C_2 の中心と点 R の距離) -1
線分 QR の長さの最大値 $=$ (C_2 の中心と点 R の距離) $+1$

となる。

このことから、点 R が線分 AB 上を動くとき C_2 の中心と点 R の距離の最小値と最大値を求めればよい。

最小値を求めるため、C_2 の中心と線分 AB の距離を求める。２点 $A,\ B$ を通る直線 $l_1: x-3y+1=0$ と垂直な直線 l_2 は

$$3kx+ky-1=0\ (k:\text{定数})$$

と表すことができる。この直線が C_2 の中心$(-2/3,\ 7/3)$ を通るとき

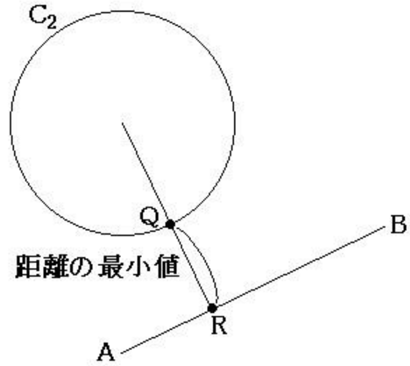
$$3k\times-\frac{2}{3}+k\times\frac{7}{3}-1=0 \Rightarrow k=3$$

となるため、l_2 の方程式は

$$\mathbf{9}x+\mathbf{3}y-1=0$$

である。l_1 と l_2 の交点 $(0,1/3)$ について、２点 A,B との座標を見ると、線分 AB を $1:\mathbf{2}$ に内分する、つまり交点は線分 AB 上にある。

よって、C_2 の中心と点 R の距離の最小値は R が点 $(0, 1/3)$ のときとなり、

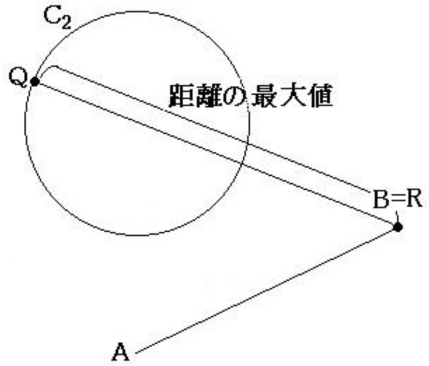


このことから線分 QR の長さの最小値は

$$\sqrt{\left(-\frac{2}{3}-0\right)^2+\left(\frac{7}{3}-\frac{1}{3}\right)^2}-1=\sqrt{\frac{40}{3}}-1=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{10}}{3}-1}$$

である。

一方、C_2 の中心と点 R の距離の最大値をとるとき、点 R が A, B のうち先ほどの交点 $(0, 1/3)$ から遠い点のときになる。交点は線分 AB を $1:2$ に内分するため、交点から遠い点は点 $B(2, 1)$ であることがわかる。



以上から、線分 QR の長さの最大値は

$$\sqrt{\left(-\frac{2}{3}-2\right)^2+\left(\frac{7}{3}-1\right)^2}+1=\sqrt{\frac{80}{3}}+1=\boldsymbol{\frac{4\sqrt{5}}{3}+1}$$

である。

第３問の正解

ア	イ	ウエ	オ	カ
3	**1**	**−3**	**6**	**3**
キ	ク	ケ	コ	サシ
3	**1**	**3**	**1**	**−2**
ス	セ	ソ	タ	チ
3	**7**	**3**	**1**	**9**
ツ	テ	ト	ナニ	ヌ
3	**2**	**2**	**10**	**3**
ネ	ノ	ハ	ヒ	フ
2	**1**	**4**	**5**	**3**