

2018 年度センター試験 数学 2 解説

第 4 問

a, b, c を実数とし、 x の整式 $P(x)$ を

$$P(x) = x^3 + a x^2 + b x + c$$

とする。3 次方程式 $P(x) = 0$ は $-1 + \sqrt{6} i$ を解にもつとする。

(1) 3 次方程式 $P(x) = 0$ の実数解を a を用いて表そう。

$P(x)$ の x に虚数 $-1 + \sqrt{6} i$ を代入すると、

$$(-1 + \sqrt{6} i)^2 = 1 - 6 - 2\sqrt{6} i = -5 - 2\sqrt{6} i$$

$$(-1 + \sqrt{6} i)^3 = (-5 - 2\sqrt{6} i)(-1 + \sqrt{6} i) = 17 - 3\sqrt{6} i$$

であるため、

$$\begin{aligned} P(-1 + \sqrt{6} i) &= (-1 + \sqrt{6} i)^3 + a(-1 + \sqrt{6} i)^2 + b(-1 + \sqrt{6} i) + c \\ &= (17 - 3\sqrt{6} i) + a(-5 - 2\sqrt{6} i) + b(-1 + \sqrt{6} i) + c \\ &= (-5a - b + c + 17) + (-2a + b - 3)\sqrt{6} i \end{aligned}$$

3 次方程式 $P(x) = 0$ は $-1 + \sqrt{6} i$ を解にもつため、上の値は 0 である。

a, b, c は実数であるため、

$$\begin{cases} -5a - b + c + 17 = 0 \\ -2a + b - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2a + 3 \\ c = 7a - 14 \end{cases}$$

となる。つまり

$$P(x) = x^3 + a x^2 + (2 a + 3)x + 7 a - 14$$

である。

二つの虚数 $-1 + \sqrt{6} i, -1 - \sqrt{6} i$ を解とする 2 次方程式で、 x^2 の係数が 1 のものは

$$(x + 1 - \sqrt{6} i)(x + 1 + \sqrt{6} i) = x^2 + 2 x + 7$$

である。 $P(x)$ をこの方程式の左辺の整式で割ると

$$\begin{aligned} P(x) &= x(x^2 + 2 x + 7) + (a - 2)x^2 + (2 a - 4)x + 7 a - 14 \\ &= (x + a - 2)(x^2 + 2 x + 7) \end{aligned}$$

より、商は $x + a - 2$ 、余りは 0 である。よって、

$$\begin{aligned} P(x) = 0 &\Rightarrow x + a - 2 = 0 \text{ または } x^2 + 2 x + 7 = 0 \\ &\Rightarrow x = -a + 2, -1 \pm \sqrt{6} i \end{aligned}$$

となり、方程式 $P(x) = 0$ の実数解は

$$x = -a + 2$$

と表せる。

(2) $P(x)$ を $x + a - 3$ で割ったときの余りが 6 であるとする。余りは $P(-a + 3)$ で求めることができる。

$$(-a + 3) + a - 2 = 1$$

であるため、

$$\begin{aligned}
P(-a+3) = 6 &\Rightarrow 1 \times \{(-a+3)^2 + 2(-a+3) + 7\} = 6 \\
&\Rightarrow (-a+3)^2 + 2(-a+3) + 1 = 0 \\
&\Rightarrow \{(-a+3) + 1\}^2 = (-a+4)^2 = 0 \\
&\Rightarrow a = 4
\end{aligned}$$

よって

$$P(x) = x^3 + 4x^2 + 11x + 14$$

である。

$P(x)$ を2次の整式 $Q(x)$ で割ったときの商は $x-1$ 、余りは $13x+17$ とすると、

$$\begin{aligned}
P(x) &= (x-1)Q(x) + 13x + 17 \\
\Rightarrow Q(x) &= \frac{P(x) - (13x + 17)}{x-1} \\
&= \frac{x^3 + 4x^2 - 2x - 3}{x-1} \\
&= x^2 + 5x + 3
\end{aligned}$$

と求められる。

第3問の正解

アイ	ウエ	オカ	キ	ク
−5	17	−2	3	2
ケ	コ	サシ	ス	セ
3	7	14	2	7
ソ	タ	チ	ツ	テ
2	0	−	2	4
ト	ナ			
5	3			