

2018 年度センター試験 数学 2 B 解説

第 1 問

[1]

- (1) 一定の半径において、扇形の「弧の長さ」と「中心角の大きさ」は比例する。このことから、半径が 1 の扇形を基準に中心角の大きさを「弧の長さ」で表す方法が「弧度法」と呼ばれるものである。

弧度法の基準となる角度が「半径 1、弧の長さが 1 の扇形の中心角の大きさ」であり、この値を「1 ラジアン」と呼ぶ。

- (2) 半径 1 の円の弧の長さ、つまり円周は 2π であるため、 360° を弧度で表すと 2π ラジアンである。比例の関係から角度と弧度の対応を求めていく。 144° の弧度を α ラジアンとすると

$$360^\circ : 2\pi = 144^\circ : \alpha \Rightarrow \alpha = 2\pi \times \frac{144}{360} = \frac{4}{5}\pi$$

である。また、 $\frac{23}{12}\pi$ ラジアンの角度を b° とすると

$$360^\circ : 2\pi = b^\circ : \frac{23}{12}\pi \Rightarrow b = 360 \times \frac{23}{12} \times \frac{1}{2\pi} = 345$$

である。

(3) $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ の範囲で

$$2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{5} \right) - 2 \cos \left(\theta + \frac{\pi}{30} \right) = 1 \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

を満たす θ の値を求めよう。

$x = \theta + \frac{\pi}{5}$ とおくと、

$$\theta + \frac{\pi}{30} = \theta + \frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{6} = x - \frac{\pi}{6}$$

となることから、 $\textcircled{1}$ は

$$2 \sin x - 2 \cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = 1$$

と表せる。加法定理を用いると

$$\begin{aligned} \cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right) &= \cos x \cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) - \sin x \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x \end{aligned}$$

であることから上の式は

$$2 \sin x - \sqrt{3} \cos x - \sin x = \sin x - \sqrt{3} \cos x = 1$$

となる。さらに

$$\sin x - \sqrt{3} \cos x = 2 \left(\frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \left(\sin x \cos \frac{\pi}{3} - \cos x \sin \frac{\pi}{3} \right) \\
 &= 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right)
 \end{aligned}$$

であることから

$$2 \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = 1 \Rightarrow \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2}$$

と変形できる。

$$\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi, \quad x = \theta + \frac{\pi}{5}$$

であることから、 $x - \frac{\pi}{3}$ の範囲は

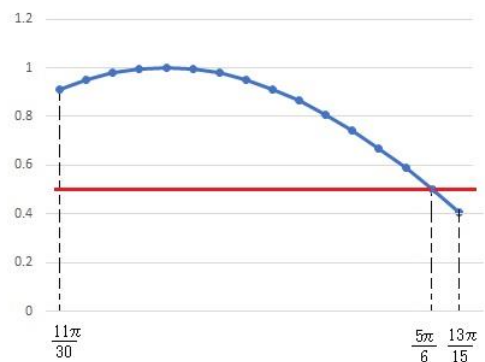
$$\frac{11}{30}\pi \leq x - \frac{\pi}{3} = \theta - \frac{2}{15}\pi \leq \frac{13}{15}\pi$$

である。この範囲で上の式を満たす値は

$$x - \frac{\pi}{3} = \frac{5}{6}\pi$$

のみ。

(右の図は、上の範囲での $\sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$ のグラフ。この範囲で $\frac{1}{2}$ の値をとるのは、 $x - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$ のみであることがわかる)



よって

$$\theta = \frac{5}{6}\pi + \frac{2}{15}\pi = \frac{29}{30}\pi$$

である。

補足：求めた θ の値を最初の式 ① に代入すると

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{7}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}, \cos\left(\theta + \frac{\pi}{30}\right) = \cos\pi = -1$$

であるため、① の等式が成り立つ。

[1] の正解

ア	イ	ウ	エオカ	キ
2	4	5	345	6
ク	ケ	コ	サシ	スセ
3	3	2	29	30

[2]

c を正の定数として、不等式

$$x^{\log_3 x} \geq \left(\frac{x}{c}\right)^3 \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

を考える。

3 を底とする ② の両辺の対数をとると、大小関係は変わらないため

$$\log_3 x^{\log_3 x} \geq \log_3 \left(\frac{x}{c}\right)^3 \Rightarrow (\log_3 x)^2 \geq 3(\log_3 x - \log_3 c)$$

となる。 $t = \log_3 x$ とおくと

$$t^2 \geq 3(t - \log_3 c) \Rightarrow t^2 - 3t + 3\log_3 c \geq 0 \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

となる。ただし、対数 $\log_a b$ に対し、 a を底といい、 b を真数という。

$c = \sqrt[3]{9}$ のとき、② を満たす x の値の範囲を求めよう。③ に $c = \sqrt[3]{9}$ を代入すると、

$$\log_3 \sqrt[3]{9} = \log_3 9^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \times \log_3 9 = \frac{2}{3}$$

より

$$t^2 - 3t + 2 = (t - 1)(t - 2) \geq 0 \Rightarrow t \leq 1, \quad t \geq 2$$

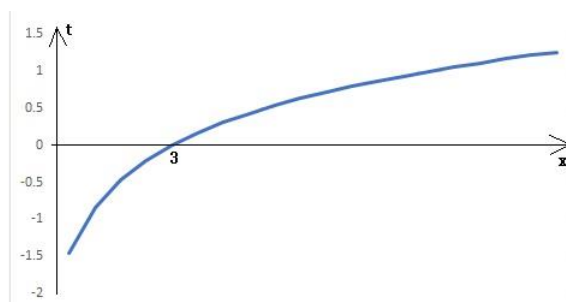
である。真数の条件から $x > 0$ であるため、求める範囲は

$$t = \log_3 x \leq 1 \Rightarrow 0 < x \leq 3, \quad t \geq 2 \Rightarrow x \geq 9$$

となる。

次に、② が $x > 0$ の範囲でつねに成り立つような c の値の範囲を求めよう。
 が $x > 0$ の範囲を動くとき、 $t = \log_3 x$ のとり得る値の範囲は「実数全体」である。つまり、

② が $x > 0$ の範囲でつねに成り立つ $\Leftrightarrow$ ③ がすべての実数 t で成り立つとなる。



$t = \log_3 x$ のグラフ

③ の右辺は

$$t^2 - 3t + 3\log_3 c = \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 3\log_3 c$$

と変形できるため、すべての実数 t に対して、上の値が 0 以上であるための必要十分条件は

$$-\frac{9}{4} + 3\log_3 c \geq 0 \Leftrightarrow \log_3 c \geq \frac{3}{4}$$

でなければならない。したがって、

$$c \geq 3^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{3^3} = \sqrt[4]{27}$$

である。

[2] の正解

ソ	タ	チ	ツ	テ
2	3	1	2	0
ト	ナ	ニ	ヌ	ネ
3	9	2	3	4
ノ	ハヒ			
4	27			