

2018 年度センター試験 数学 2 B 解説

第 3 問

第 4 項が 30、初項から第 8 項までの和が 288 である等差数列を $\{a_n\}$ とし、 $\{a_n\}$ の初項から第 8 項までの和を S_n とする。また、第 2 項が 36、初項から第 3 項までの和が 156 である等比数列で公比が 1 より大きいものを $\{b_n\}$ とし、 $\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和を T_n とする。

(1) $\{a_n\}$ の初項と交差を求める。交差を d とすると

$$\begin{aligned} a_4 &= a_1 + 3d, \\ a_1 + a_2 + \cdots + a_8 &= \frac{8}{2}\{a_1 + (a_1 + 7d)\} = 4(2a_1 + 7d) \end{aligned}$$

となる。上の条件から a_1, d を求めると

$$\begin{cases} a_1 + 3d = 30 \\ 4(2a_1 + 7d) = 288 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -6 \\ d = 12 \end{cases}$$

となる。以上より、 $\{a_n\}$ の初項は -6 交差は 12 である。一般項は $a_n = -6 + (n-1) \times 12 = 12n - 18$ となることから

$$S_n = \frac{n}{2}\{-6 + (12n - 18)\} = 6n^2 - 12n$$

である。

(2) $\{b_n\}$ の初項と交比を求める。交差を r とすると

$$\begin{aligned} b_2 &= b_1 r, \\ b_1 + b_2 + b_3 &= b_1 + b_1 r + b_1 r^2 = b_1(1 + r + r^2) \end{aligned}$$

となる。上の条件から b_1, r を求めると

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} b_1 r = 36 \\ b_1(1 + r + r^2) = 156 \end{cases} \\
& \Rightarrow 36(1 + r + r^2) = b_1 r(1 + r + r^2) = 156r \\
& \Rightarrow 3r^2 - 10r + 3 = (3r - 1)(r - 3) = 0 \\
& \Rightarrow r = \frac{1}{3}, 3
\end{aligned}$$

公比は 3 より大きいことから $r = 3$ 、よって $b_1 = 36/r = 12$ となる。以上より、 $\{b_n\}$ の初項は 12 交差は 3 である。一般項は $b_n = 12 \cdot 3^{n-1}$ となることから

$$T_n = 12 \times \frac{3^n - 1}{2} = 6(3^n - 1)$$

である。

(3) 数列 $\{c_n\}$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned}
c_n &= \sum_{k=1}^n (n - k + 1)(a_k - b_k) \\
&= n(a_1 - b_1) + (n - 1)(a_2 - b_2) + \cdots + 2(a_{n-1} - b_{n-1}) + (a_n - b_n) \\
&(n = 1, 2, 3, \dots)
\end{aligned}$$

たとえば

$$\begin{aligned}
c_1 &= a_1 - b_1, & c_2 &= 2(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) \\
c_3 &= 3(a_1 - b_1) + 2(a_2 - b_2) + (a_3 - b_3)
\end{aligned}$$

である。数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよう。

$\{c_n\}$ の階差数列を $\{d_n\}$ とする。 $d_n = c_{n+1} - c_n$ であるから、

$$\begin{aligned}
c_{n+1} &= (n + 1)(a_1 - b_1) + n(a_2 - b_2) + \cdots + 2(a_n - b_n) + (a_{n+1} - b_{n+1}) \\
c_n &= n(a_1 - b_1) + (n - 1)(a_2 - b_2) + \cdots + (a_n - b_n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow c_{n+1} - c_n &= (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \cdots + (a_n - b_n) + (a_{n+1} - b_{n+1}) \\ &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1}) - (b_1 + b_2 + \cdots + b_n + b_{n+1})\end{aligned}$$

つまり

$$d_n = S_{n+1} - T_{n+1}$$

を満たす。したがって、(1) と (2) により

$$\begin{aligned}d_n &= 6(n+1)^2 - 12(n+1) - 6(3^{n+1} - 1) \\ &= 6n^2 - 6 \cdot 3^{n+1} \\ &= \mathbf{6n^2 - 2 \cdot 3^{n+2}}\end{aligned}$$

ここで、

$$c_1 = a_1 - b_1 = -6 - 12 = \mathbf{-18}$$

であるから、

$$\begin{aligned}c_n &= c_1 + \sum_{k=1}^{n-1} d_k \\ &= -18 + \sum_{k=1}^{n-1} (6k^2 - 2 \cdot 3^{k+2}) \\ &= -18 + 6 \sum_{k=1}^{n-1} k^2 - 2 \cdot 3^3 \sum_{k=1}^{n-1} 3^{k-1} \\ &= -18 + n(n-1)(2n-1) - 2 \cdot 3^3 \cdot \frac{3^{n-1} - 1}{2} \\ &= \mathbf{2n^3 - 3n^2 + n + 9 - 3^{n+2}}\end{aligned}$$

となる。

第4問の正解

アイ	ウエ	オ	カキ	クケ
－6	12	6	12	12
コ	サ	シ	ス	セ
3	6	3	1	5
ソ	タ	チ	ツテト	ナ
6	3	2	－18	2
ニ	ヌ	ネ		
3	9	2		