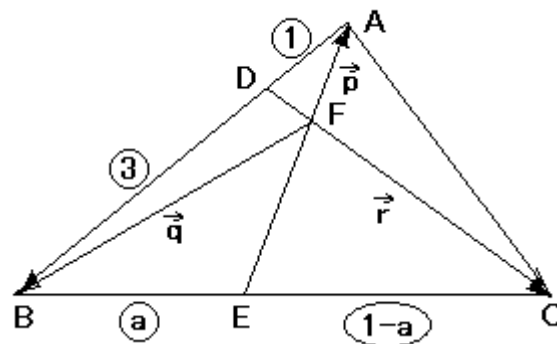


# 2018年度センター試験 数学2B解説

## 第4問

$a$  を  $0 < a < 1$  を満たす定数とする。三角形  $ABC$  を考え、辺  $AB$  を  $1:3$  に内分する点を  $D$ 、辺  $BC$  を  $a:(1-a)$  に内分する点を  $E$ 、直線  $AE$  と直線  $CD$  の交点を  $F$  とする。 $\overrightarrow{FA} = \vec{p}, \overrightarrow{FB} = \vec{q}, \overrightarrow{FC} = \vec{r}$  とおく。(下の図の丸の中の値は辺の比を表している)



(1)  $\overrightarrow{AB}$  を  $\vec{p}, \vec{q}$  を使い表すと、

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FB} - \overrightarrow{FA} = \vec{q} - \vec{p}$$

であり、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AB}|^2 &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= (\vec{q} - \vec{p}) \cdot (\vec{q} - \vec{p}) \\ &= \vec{q} \cdot \vec{q} - 2\vec{p} \cdot \vec{q} + \vec{p} \cdot \vec{p} \\ &= |\vec{p}|^2 - 2\vec{p} \cdot \vec{q} + |\vec{q}|^2 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

(2) 点  $D$  は辺  $AB$  を  $1:3$  に内分するため、以下の式が成り立つ。

$$\overrightarrow{FD} = \frac{3}{3+1}\vec{p} + \frac{1}{3+1}\vec{q} = \frac{3}{4}\vec{p} + \frac{1}{4}\vec{q} \quad \dots\dots\dots ②$$

(3)  $s, t$  をそれぞれ  $\overrightarrow{FD} = s\vec{r}, \overrightarrow{FE} = t\vec{p}$  となる実数とする。 $s$  と  $t$  を  $a$  を用いて表してみる。

$\overrightarrow{FD} = s\vec{r}$  であるから、②により

$$s\vec{r} = \frac{3}{4}\vec{p} + \frac{1}{4}\vec{q} \Rightarrow \vec{q} = -3\vec{p} + 4s\vec{r} \quad \dots\dots\dots ③$$

である。また  $\overrightarrow{FE}$  について、

$$\overrightarrow{FE} = (1-a)\vec{q} + a\vec{r}$$

が成り立つ。 $\overrightarrow{FE} = t\vec{p}$  であるから

$$(1-a)\vec{q} = t\vec{p} - a\vec{r} \Rightarrow \vec{q} = \frac{t}{1-a}\vec{p} - \frac{a}{1-a}\vec{r} \quad \dots\dots\dots ④$$

である。

点  $F$  は三角形  $ABC$  の内部の点であるため、2つのベクトル  $\vec{p}, \vec{r}$  は一次独立である。したがって ③、④ から

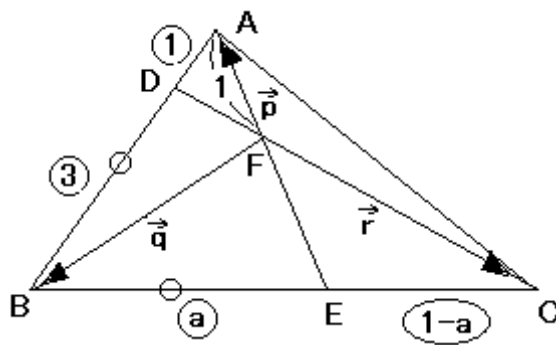
$$-3 = \frac{t}{1-a}, \quad 4s = -\frac{a}{1-a}$$

よって、

$$s = \frac{-a}{4(1-a)}, \quad t = -3(1-a)$$

である。

(4)  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BE}|$  とする。 $|\vec{p}| = 1$  のとき、 $\vec{p}$  と  $\vec{q}$  の内積を  $a$  を用いて表そう。



① より

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\vec{p}|^2 - 2 \vec{p} \cdot \vec{q} + |\vec{q}|^2 = 1 - 2 \vec{p} \cdot \vec{q} + |\vec{q}|^2$$

また、(3)の結果から

$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{FE} - \overrightarrow{FB} = -3(1-a)\vec{p} - \vec{q}$$

よって

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{BE}|^2 &= \{-3(1-a)\}^2 |\vec{p}|^2 + 2 \times \{-3(1-a)\} \times (-1) \vec{p} \cdot \vec{q} + |\vec{q}|^2 \\ &= \mathbf{9}(1-a)^2 + \mathbf{6}(1-a) \overrightarrow{p} \cdot \vec{q} + |\vec{q}|^2 \end{aligned}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BE}| \text{ より } |\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{BE}|^2 \text{ である。}$$

$$\begin{aligned} 1 - 2 \vec{p} \cdot \vec{q} + |\vec{q}|^2 &= 9(1 - a)^2 + 6(1 - a)\vec{p} \cdot \vec{q} + |\vec{q}|^2 \\ \Rightarrow (6a - 8)\vec{p} \cdot \vec{q} &= 8 - 18a + 9a^2 \\ \Rightarrow \vec{p} \cdot \vec{q} &= \frac{8 - 18a + 9a^2}{6a - 8} = \frac{3a - 2}{2} \end{aligned}$$

第4問の正解

|          |           |          |           |          |
|----------|-----------|----------|-----------|----------|
| ア        | イ         | ウ        | エ         | オ        |
| <b>2</b> | <b>2</b>  | <b>3</b> | <b>4</b>  | <b>1</b> |
| カ        | キク        | ケ        | コ         | サ        |
| <b>4</b> | <b>-3</b> | <b>4</b> | <b>1</b>  | <b>a</b> |
| シ        | スセ        | ソ        | タチ        | ツ        |
| <b>a</b> | <b>-a</b> | <b>4</b> | <b>-3</b> | <b>9</b> |
| テ        | トナ        | ニ        | ヌ         |          |
| <b>6</b> | <b>3a</b> | <b>2</b> | <b>2</b>  |          |