

2018 年度センター試験 情報関係基礎 解説

第2問

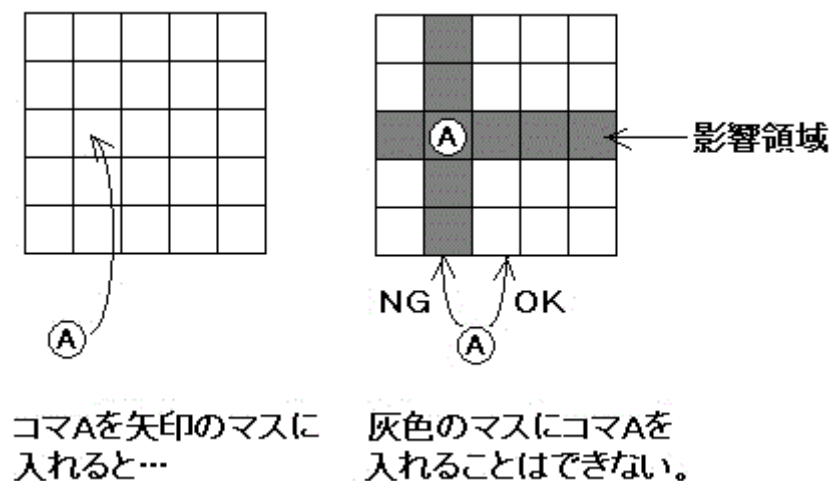
正方形のマスが N 行 N 列に並んでいる盤面（以下 $N \times N$ の盤面）に、できるだけ多くのコマを置くことを考える。

- ・一つのマスには、コマは1個しか置けない。
- ・盤面に置いた各コマは、他のコマが置けなくなる**影響領域**を持つ。よって新しくコマを置くことができるマスの範囲は制限される。
- ・2個以上のコマの影響領域が重なっても構わない。
- ・置くコマの数は十分であり、不足することはない。

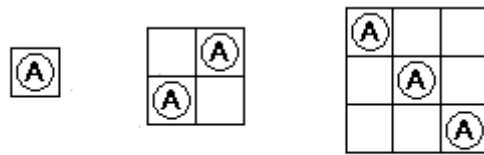
ここでは、2種類の影響領域を持つコマ（コマA、コマB）をそれぞれ盤面に置くことを考える。

問1

コマAは、コマを中心として盤面の端までタテヨコ方向に影響領域を持つ。すなわち、盤面のある位置にコマAを置くと、そのコマと同じ行あるいは同じ列には、別のコマを置くことができない。



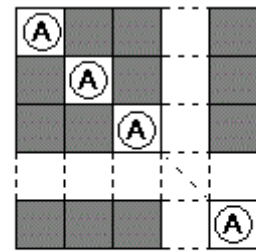
$N = 1, 2, 3$ のときの各盤面でコマAを置くことができる最大個数を調べると、以下の通りになる。



N=1 のとき N=2 のとき N=3 のとき

このように、置くことができる最大個数は $N = 1$ のときは 1 個、 $N = 2$ のときは 2 個、 $N = 3$ のときは 3 個である。

一般の $N \times N$ の盤面には、右図のように左上から右下にかけての対角線に沿って N 個のコマ A を置くことができる。 N 個のコマ A を置いたとき、各行に 1 個ずつコマ A があるため、この盤面には新たにコマ A を置くことができない。よって、 $N \times N$ の盤面には最大で N 個のコマ A を置くことができる。



残りのマスは
すべて影響領域
になる。

次に、コマ A を置ける場所の特徴を調べていく。マスの位置を表すため、盤面の北から南へと順に $1, 2, \dots, N$

と行番号を振り、西から東へと $1, 2, \dots, N$ と列番号を振る。例えば、図 1 のコマ A があるマスは第 3 行、第 2 列と表される。

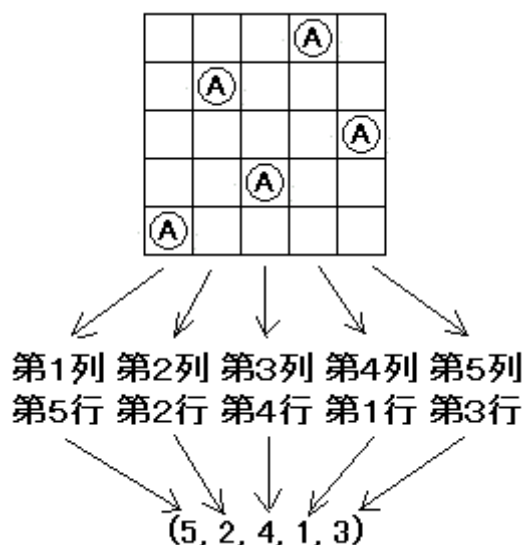


コマ A は
第 3 行、第 2 列
にある。

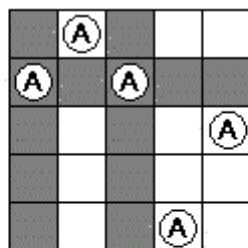
$N \times N$ の盤面に N 個のコマ A を置いたとき、コマ A が置かれたマスの位置を表すため、

(第1列にあるマスの行番号, 第2列にあるマスの行番号,
 …, 第 N 列にあるマスの行番号)

という数字の並びで表していく。先ほど書いたように、各列にはコマAを1個までしか置けないため、行番号は1個に決まる。例えば、下図は $(5, 2, 4, 1, 3)$ と表現することができる。



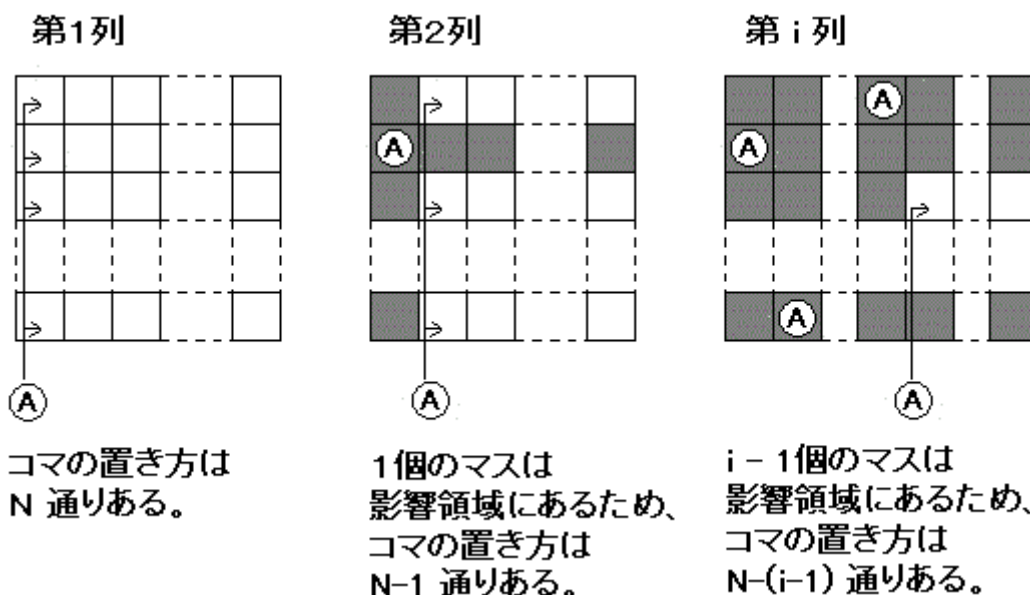
もし、この数字の並びで同じ数字のものが現れたとき、それらに対応するコマAは同じ行に置かれているため、互いの影響領域に入っていることがわかる。つまり、この数字の並びに現れる数字はすべて異なるものでなければならない。 $N = 5$ の場合、この他の置き方としてはすべて異なる数字が並んでいる $(1, 2, 3, 4, 5)$ と $(4, 2, 3, 1, 5)$ がある。



$(2, 1, 2, 5, 3)$ のように同じ数字が含まれていると、互いの影響領域にコマAは置かれていることになる。

次に、 $N \times N$ の盤面では N 個のコマAの置き方が何通りあるかについて考える。以下では、盤面に何もコマが置かれていない状態から始め、列番号の順に、列ごとに1個ずつコマAを置いていく場合を考える。

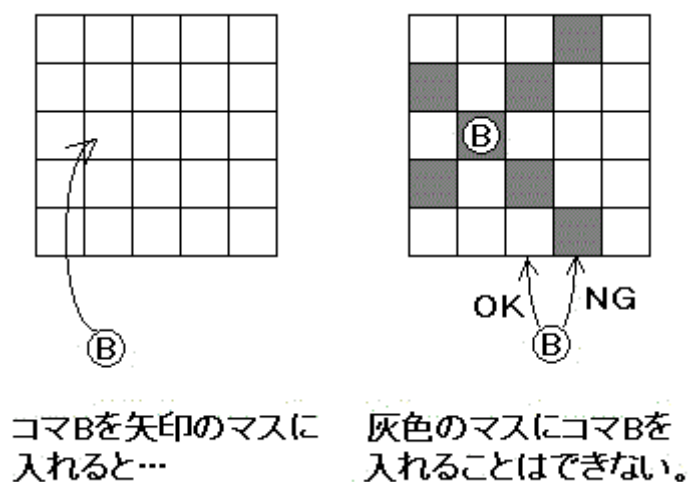
第1列でのコマAの置くとき、盤面にほかのコマはまだ置かれていないため、どのマスにおいても構わない。つまり第1列でのコマAの置き方は N 通りある。各行には最大で1個しかコマAを置けない。そのため、第2列以降は第1列にコマAを置いた行には置けない。つまり、第2列でのコマAの置き方は $N - 1$ 通りある。同様に考えていくと、第 i 列 ($1 < i \leq N$) には、第1列から第 $i - 1$ 列にコマが置かれた行には置けない。つまり、第 i 列より西側にあるすべてのコマと異なる行にコマAを置くことができる。つまり第 i 列でコマAが置けないマスが $i - 1$ 個あるため、第2列でのコマAの置き方は $N - (i - 1) = N - i + 1$ 通りある。



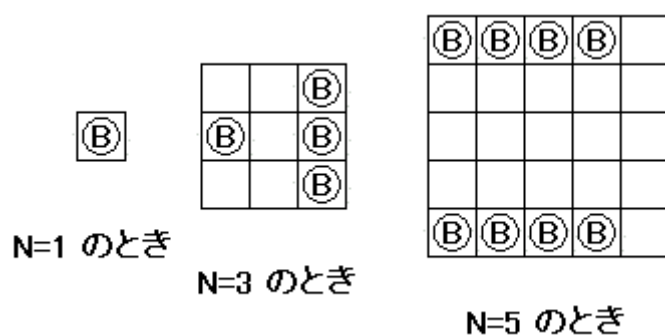
この考えを第 N 列まで行くと、盤面全体では N 個のコマAの置き方が全部で $N \times \cdots \times 1$ 通り存在することがわかる。したがって、例えば、 $N = 4$ のときは $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ 通りの置き方があるとわかる。

問 2

コマ B は、図のように、コマを中心として盤面の端までマスの対角線方向に影響領域をもつ。 $N \times N$ の盤面に、できるだけ多くのコマ B を置くことを考える。

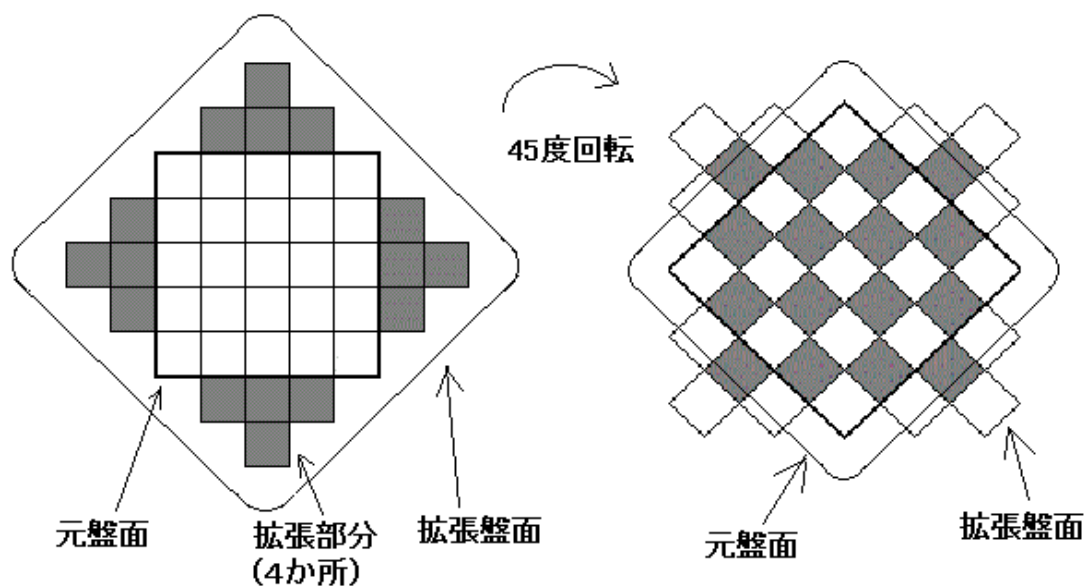


ここでは、 N が 3 以上の奇数の場合だけを考える。 $N = 3$ の場合、図のようにコマ B は最大で 4 個置くことができる。また、図は $N = 5$ の場合にできるだけ多くのコマ B を置いた例である。以下では、 $N \times N$ の盤面にできるだけ最大いくつのコマを置くことができるかについて考える。

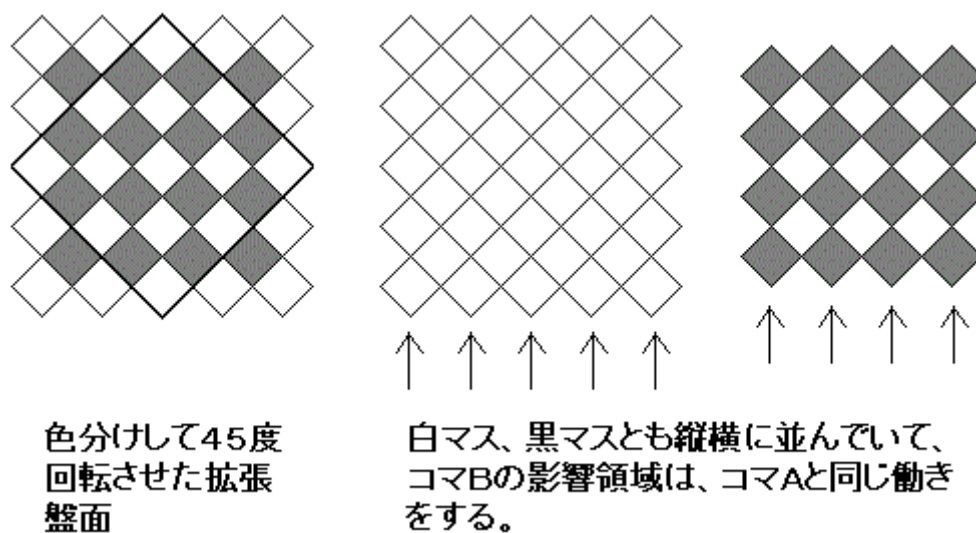


コマ A の場合での考え方を応用するため、盤面の外側を図のように階段状の拡張した仮の盤面を考える。以降では、この拡張した盤面を拡張盤面と呼び、元の $N \times N$ の盤面を盤面と呼ぶことにする。

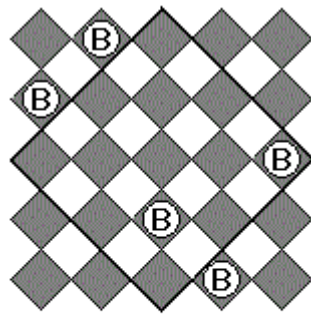
次に、拡張盤面のマスを互い違いに白と黒で色分けして、盤面全体を時計回りに 45 度回転させる。このように盤面を回転させると、コマ B の影響領域は縦横方向になり、あたかもコマ A のように見える。



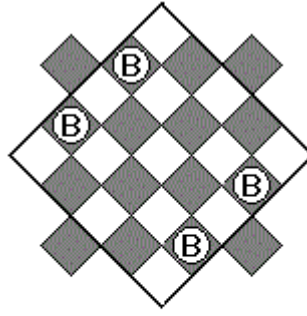
拡張盤面にコマBを置いていくとき、どの白マスにコマBを置いても、その影響領域は黒マスを含まない。同様に、どの黒マスにコマBを置いても、その影響領域は白マスを含まない。つまり、白マスからなる部分と黒マスからなる部分を互いに独立した二つの盤面として考えることができる。



大きいほうの盤面と小さいほうの盤面の列の数はそれぞれ $N, N - 1$ である。よって、それぞれの盤面に置くことができるコマBの数は列の数と同じで、大きい盤面には N 個、小さいほうの盤面には $N - 1$ このコマBを置くことができる。



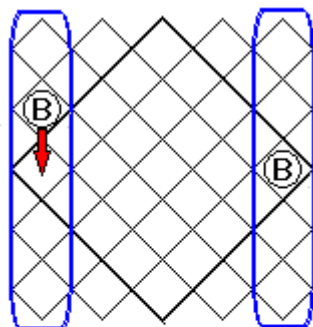
大きい盤面(白マス)
は N 個のコマBを
置くことができる。



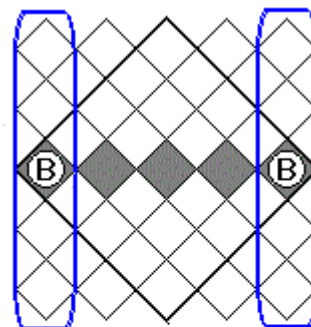
小さい盤面(黒マス)
は $N-1$ 個のコマBを
置くことができる。

拡張盤面に $N + (N - 1) = 2N - 1$ 個のコマBが置かれていると仮定する。
45 度回転した拡張盤面の列の数は白マスの部分、黒マスの部分合わせて $2N - 1$ 列あり、各列に置くことができるコマBは最大1個であるため、各列には **1** 個ずつコマが置かれている。しかし、これらのコマは元盤面に含まれていないものもあるため、コマを移動させて、すべてのコマを元盤面上に収められるかどうかを考える。

まず、45 度回転した拡張盤面の左右両端の列にある二つのコマを元盤面に収めることを考える。それぞれの列で元盤面と重なるマスは列の中央のマスのみであるため、それぞれの列の**中央**のマスにコマを移動させなければならない。しかし、二つのコマを中央のマスに移動させると、お互いの影響領域にもう一方のコマが置かれているため、二つのコマのうちどちらかしか元盤面に収めることができない。

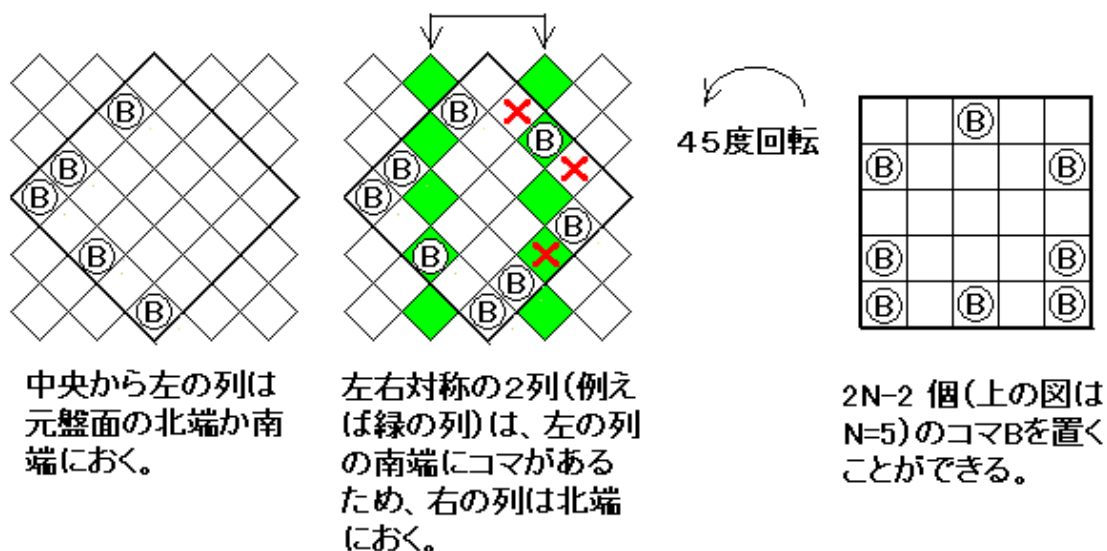


左右両端の列(青枠)
のコマBを元盤面に
収めるには、中央に
置くしかない。



中央に置くとお互い
に影響領域にかか
る。
⇒1個しか置けない

- 左右両端以外の列については以下の考え方で、コマを移動することができる。
- 中央の列のコマは元盤面における南端か北端に置く。
 - 中央から左の列では元盤面と重なるマスのうち南端か北端に置く。
 - 中央から右の列では、中央の列に対して左右対称の列に置かれたコマの位置を見る。南端に置かれていたら北端、北端に置かれていたら南端に置く。



以上の操作から、 $2N - 1$ 個のコマBのうち、左右両端の1個を除いてすべて元盤面に収めることができる。

以上の議論から、 $N \times N$ の盤面にはコマBを最大で $2N - 2$ 個置くことができる。

[1] の正解

ア	イ	ウ	エ	オ
2	3	2	1, 4 (順不同)	
カ	キ	ク	ケコ	サ
0	2	7	24	4
シ	ス	セ	ソ	タ
0	3	2	1	6
チ				
6				