

多項式の関数 $y = f(x)$ が $x = a$ で x 軸と交わるとき $f(x)$ は $x - a$ を因数として持つ。また、直線と接するとき次のことが成り立つ。

「 $y = f(x)$ が $x = a$ で直線 $y = px + q$ と接するとき、 $f(x) - (px + q)$ は $(x - a)^2$ を因数に持つ」

問題では $y = f(x)$ が $x = 0$ で x 軸と交わるため $f(x)$ は x を因数として持つ。
さらに $y = f(x)$ が $x = 3$ で x 軸（つまり $y = 0$ ）と接するため、 $f(x)$ は $(x - 3)^2$ を因数として持つ。これより

$$f(x) = ax(x - 3)^2 = ax^3 - 6ax^2 + 9ax$$

となる。さらに $y = f(x)$ は $x = 0$ で直線 $y = \frac{3}{2}x$ と接するため、

$$f(x) - \frac{3}{2}x = ax^3 - 6ax^2 + (9a - \frac{3}{2})x$$

は x^2 を因数に持つ。このことから

$$9a - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{6}$$

となるため

$$f(x) = \frac{1}{6}x(x - 3)^2 = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + \frac{3}{2}x$$

となる。