積分を計算するために「部分積分」を使います。

微分可能な関数 $f_1(x),\ f_2(x)$ について

$$\int_a^b f_1(x)f_2'(x)dx = [f_1(x)f_2(x)]_a^b - \int_a^b f_1'(x)f_2(x)dx$$

問題では

$$\int_0^3 \frac{1}{6}(x^3 - 6x^2 + 9x)dx = \frac{1}{6}\int_0^3 x(x-3)^2 dx$$

を計算する。$f_1(x) = x,\ f_2(x) = (x-3)^3/3$ とすると $f_2'(x) = (x-3)^2$ となるため、上の部分積分の式に当てはめると

$$\begin{aligned}
\frac{1}{6}\int_0^3 x(x-3)^2 dx &= \frac{1}{6}\left[x \times \frac{(x-3)^3}{3}\right]_0^3 - \frac{1}{6}\int_0^3 \frac{(x-3)^3}{3}dx \\
&= 0 - \frac{1}{6}\left[\frac{(x-3)^4}{12}\right]_0^3 \\
&= -\frac{1}{6}\left(0 - \frac{81}{12}\right) \\
&= \frac{9}{8}
\end{aligned}$$