

10種類のくじの3種類を持っているとき、新しいくじを出すまでの期待値を求める。
本来期待値は

(回数) × (その回数でくじが出る確率) の和

で計算できる。

1回くじを引いて、新しいくじが出る確率は $\frac{7}{10}$ 、出ない確率は $\frac{3}{10}$ 。
 $n-1$ 回までは新しいくじ以外で、 n 回目に新しいくじが出る確率は

$$\left(\frac{3}{10}\right)^{n-1} \times \frac{7}{10}$$

このことから期待値は

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left(n \times \left(\frac{3}{10}\right)^{n-1} \times \frac{7}{10} \right) &= \frac{7}{10} \sum_{n=1}^{\infty} \left(n \times \left(\frac{3}{10}\right)^{n-1} \right) \\ &= \frac{7}{10} \left(1 + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \left(\frac{3}{10}\right)^2 + 4 \times \left(\frac{3}{10}\right)^3 + \cdots \right) \end{aligned}$$

この値が $\frac{10}{7}$ となることを証明する。この式の $\frac{7}{10}$ を $1 - \frac{3}{10}$ と書き直すと、期待値は以下のような表し方になる。

$$\begin{aligned} &\left(1 - \frac{3}{10}\right) \left(1 + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \left(\frac{3}{10}\right)^2 + 4 \times \left(\frac{3}{10}\right)^3 + \cdots \right) \\ &= 1 + \frac{3}{10} + \left(\frac{3}{10}\right)^2 + \left(\frac{3}{10}\right)^3 + \cdots \end{aligned}$$

この期待値の式にもう一度 $1 - \frac{3}{10}$ を掛けると

$$\begin{aligned} &\left(1 - \frac{3}{10}\right) \left(1 + \frac{3}{10} + \left(\frac{3}{10}\right)^2 + \left(\frac{3}{10}\right)^3 + \cdots \right) \\ &= 1 + 0 + 0 + \cdots \\ &= 1 \end{aligned}$$

よって期待値は $1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$ の逆数、つまり $\frac{10}{7}$ である。

一般に k 種類のくじを持っている場合については上の計算式の $\frac{3}{10}, \frac{7}{10}$ を $\frac{k}{10}, \frac{10-k}{10}$ と置き換えることで期待値が $\frac{10}{10-k}$ となることが計算できる。