

一般に $n \geq 2$ のとき、A が「1 ~ n のカードとジョーカー」、B が「1 ~ n のカード」を持った状態でババ抜きを行う。B が先にカードを引き始め A、B が勝つ確率をそれぞれ p_n, q_n とする。番組での問題では p_{13} を求める。

まず p_n を求める式を作る。

最初に B がジョーカーを引いたとき：

A, B の立場が変わったため、この後 A が勝つ確率は始めの状態での B が勝つ確率と同じになる。従ってこの後 A が勝つ確率は q_n となる。

最初に B がジョーカー以外を引いたとき：

B はペアになるカードを捨てる。次に A が B のカードを引くが、どのカードを引いてもペアができカードを捨てることになる。つまり A がカードを引いた後は A, B それぞれ 1 ~ n のカードのうち同じ 2 枚が無い状態になる。

例： $n = 13$ の時を考える。A、B の手札をそれぞれ [1 ~ 13, J], [1 ~ 13] と表す (J はジョーカー) 始めに B が 13 を引き、次に A が 1 を引いたときババ抜きの流れは以下ようになる。

$$\begin{aligned} A : [1 \sim 13, J], B : [1 \sim 13] \\ \Rightarrow (B \text{ が } 13 \text{ を引く}) \Rightarrow A : [1 \sim 12, J], B : [1 \sim 12] \\ \Rightarrow (A \text{ が } 1 \text{ を引く}) \Rightarrow A : [2 \sim 12, J], B : [2 \sim 12] \end{aligned}$$

B, A が引いた後の手順は 1 ~ $n - 2$ のカードとジョーカーからなるババ抜きをすることと同じになる。よってこの後 A が勝つ確率は p_{n-2} となる。

B がジョーカーを引く確率は $1/(n+1)$ であるため p_n に関して以下の式が成り立つ。

$$p_n = \frac{1}{n+1}q_n + \frac{n}{n+1}p_{n-2}$$

さらに $p_n + q_n = 1$ より

$$p_n = \frac{1}{n+1}(1 - p_n) + \frac{n}{n+1}p_{n-2} \Rightarrow p_n = \frac{n}{n+2}p_{n-2} + \frac{1}{n+2} \dots\dots(1)$$

$n = 1$ の時は B がジョーカー以外 (つまり 1 のカード) を引けば A は負けるため、上の説明から $p_1 = \frac{1}{2}q_1$ が成り立つ。さらに $p_1 + q_1 = 1$ から $p_1 = \frac{1}{3}$ となる。

式 (1) を変形すると

$$p_n - \frac{1}{2} = \frac{n}{n+2} \left(p_{n-2} - \frac{1}{2} \right)$$

となる。 $n = 13$ を代入して上の式変形を繰り返すと

$$\begin{aligned} p_{13} - \frac{1}{2} &= \frac{13}{15} \left(p_{11} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{13}{15} \cdot \frac{11}{13} \left(p_9 - \frac{1}{2} \right) \\ &\dots \dots \dots \\ &= \frac{13}{15} \cdot \frac{11}{13} \cdots \frac{5}{7} \cdot \frac{3}{5} \left(p_1 - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{5} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) \\ &= -\frac{1}{30} \end{aligned}$$

以上より

$$p_{13} = -\frac{1}{30} + \frac{1}{2} = \frac{7}{15}$$

と答えが出る。

一般には

$$p_n = \frac{n+1}{2(n+2)} \quad (n : \text{odd}), \quad \frac{n}{2(n+2)} \quad (n : \text{even})$$

となる。