

0 と 1 に関する二重和 $\oplus$ を以下のように定める。

$$\begin{aligned} 0 \oplus 0 &= 1 \oplus 1 = 0 \\ 0 \oplus 1 &= 1 \oplus 0 = 1 \end{aligned}$$

2 個の 2 進数

$$A = a_1 a_2 \cdots a_n, \quad B = b_1 b_2 \cdots b_n \quad (a_i, b_i = 0, 1)$$

(A, B の桁数が異なるときは、桁数の少ないほうの頭に 0 をつけて桁を合わせる) の二重和 $A \oplus B$ を以下のように定める。

$$A \oplus B = (a_1 \oplus b_1)(a_2 \oplus b_2) \cdots (a_n \oplus b_n)$$

例 : $A = 1110, B = 0111$ のとき

$$\begin{aligned} A \oplus B &= (1 \oplus 0)(1 \oplus 1)(1 \oplus 1)(0 \oplus 1) \\ &= 1001 \end{aligned}$$

二重和について

$$(A \oplus B) \oplus B = A, \quad (A \oplus B) \oplus A = B$$

が成り立つ。

格子状の表の左上から行、列それぞれに 0, 1, 10, 11, $\dots$ と 2 進数の番号を付ける。表の A 行 B 列の枠に $A \oplus B$ を書き込む。

0	1	10	11	100	101	110	111
1	0	11	10	101	100	111	110
10	11	0	1	110	111	100	101
11	10	1	0	111	110	101	100
100	101	110	111	0	1	10	11
101	100	111	110	1	0	11	10
110	111	100	101	10	11	0	1
111	110	101	100	11	10	1	0

たとえば、右上の太文字の「100」は $10 \oplus 110 = 100$, 右下の太文字の「10」は $111 \oplus 101 = 10$ によって決まる。

この表が問題の条件を満たす表であることを証明する。条件の一番目の『左上隅は「0」と書き込む』という条件は満たしているため、二番目の条件を満たすことを示していく。

まず、 A 行 B 列に入る数が「その枠と同じ行で左側にある数」とも「その枠と同じ列で上側にある数」とも異なることを示す。このためには以下の 2 つを証明すればよい。

- A 行に入る数はすべて異なる。 $B \neq B' \Rightarrow A \oplus B \neq A \oplus B'$.
- B 列に入る数はすべて異なる。 $A \neq A' \Rightarrow A \oplus B \neq A' \oplus B$.

1 番目の証明は

$$\begin{aligned} A \oplus B = A \oplus B' &\Rightarrow (A \oplus B) \oplus A = (A \oplus B') \oplus A \\ &\Rightarrow B = B' \end{aligned}$$

であることから示される。2 番目も同様に証明できる。

次に A 行 B 列に入る数とその枠の上または左にある数とは異なる数の中で最も小さい正の整数であることを証明する。このことは以下のことを証明すればよい。

・ $A \oplus B$ より小さい数はその枠の上または左に書かれている。数式で表現すると

$$C < A \oplus B \Rightarrow \exists A' < A, A' \oplus B = C \text{ or } \exists B' < B, A \oplus B' = C$$

$A = B$ のときは $A \oplus B = 0$ であることから $A \oplus B$ より小さい数はその列、行にはない。

$A \neq B$ のとき、 $A \oplus B > C$ となる 2 進数 $C = c_1 c_2 \cdots c_n$ について以下の条件を満たす 1 以上 n 以下の整数 i がある。

$$a_j \oplus b_j = c_j \ (j < i), \quad a_i \oplus b_i > c_i.$$

($i = 1$ であるときは左の条件は考えない) 2 番目の条件から $c_i = 0$ と $a_i \oplus b_i = 1$ つまり $(a_i, b_i) = (1, 0)$ または $(0, 1)$ が成り立つ。

$(a_i, b_i) = (1, 0)$ のとき $B \oplus C$ という数について以下のことが成り立つ。

$$\begin{aligned} b_j \oplus c_j &= b_j \oplus (a_j \oplus b_j) = a_j \quad (j < i) \\ b_i \oplus c_i &= 0 \oplus 0 = 0 < a_i \end{aligned}$$

このことから $B \oplus C < A$ であることがわかる。さらに $(B \oplus C) \oplus B = C$ であるため、 C は (A 行 B 列より上にある) $B \oplus C$ 行 B 列の枠に書かれている。

同様にして $(a_i, b_i) = (0, 1)$ のとき $A \oplus C < B$, $A \oplus (A \oplus C) = C$ であるため、 C は (A 行 B 列より左にある) A 行 $A \oplus C$ 列の枠に書かれている。

例: $A = 11110$, $B = 01011$ のとき、 $A \oplus B = 10101$ である。以下の 10101 より小さい 2 つの数について A 行 B 列より上または左にあるか調べてみる。

$C = 10011$ のとき上の証明において $i = 3$, $(a_i, b_i) = (1, 0)$ である。よって 10011 は $B \oplus C = 11000 (< A)$ 行 B 列に書かれている。

$C = 10100$ のとき上の証明において $i = 5$, $(a_i, b_i) = (0, 1)$ である。よって 10100 は A 行 $A \oplus C = 01010 (< B)$ 列に書かれている。

以上で上記の 2 進数を使った数の書き入れ方で問題の条件を満たすことが証明された。