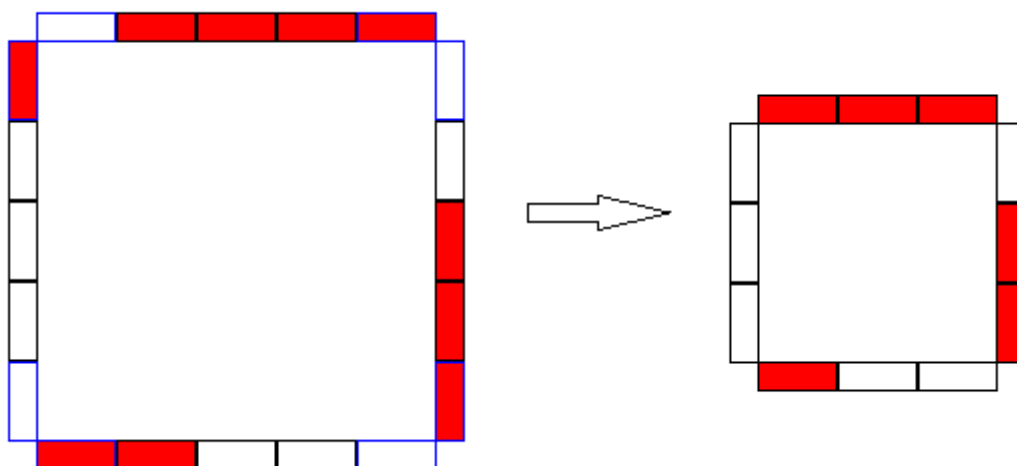


赤と白の棒の長さをそれぞれ R, W とする。このとき $\frac{R}{W}$ が求める値である。また正方形を形成する 4 辺それぞれの赤 $r_1, \dots, r_4$ と白 $w_1, \dots, w_4$ の棒の本数を

r_1 本 w_1 本, r_2 本 w_2 本, r_3 本 w_3 本, r_4 本 w_4 本
 $(r_1 < r_2 < r_3 < r_4)$ とする。

ここで $r_1 > 0$ であるとき、4 辺それぞれから赤の棒を r_1 本ずつ取っても同じ長さだけ短くなるため正方形を形成する。つまり正方形を形成する最小の本数ではないため $r_1 = 0$ でなければいけない。同様に $w_1 > w_2 > w_3 > w_4$ より最小の本数であるためには $w_4 = 0$ でなければいけない。



左の図の青の棒をそれぞれ取り除いても正方形を作ることができる。

(図では赤と白を同じ長さで表していますが、違う長さでも同じです)

改めて 4 辺の赤と白の棒の本数を表すと、

w_1 本, r_2 本 w_2 本, r_3 本 w_3 本, r_4 本 $(0 < r_2 < r_3 < r_4)$

となる。4 辺は長さが同じであるため、

$$\begin{cases} w_1 W = w_2 W + r_2 R \\ w_1 W = w_3 W + r_3 R \\ w_1 W = r_4 R \end{cases}$$

よって

$$\begin{cases} r_2 = \frac{W}{R} (w_1 - w_2) \\ r_3 = \frac{W}{R} (w_1 - w_3) \\ r_4 = \frac{W}{R} w_1 \end{cases}$$

特に最後の式から $\frac{W}{R} = \frac{r_4}{w_1}$ となる。 w_1, r_4 はともに整数であるため、 $\frac{W}{R}$ が有理数であることが分かる。以降 W, R を互いに素な整数とする。

また $r_4 = \frac{W}{R} w_1$ が整数になるためには w_1 は R の倍数、 r_4 は W の倍数でなければならない。同様に r_2, r_3 も W の倍数でなければならない。

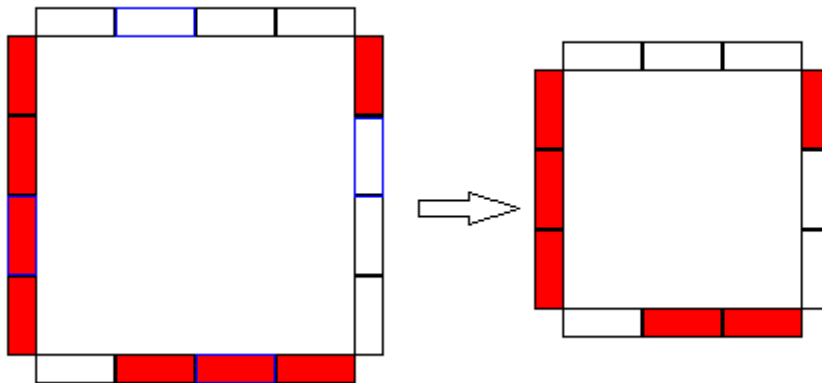
整数 m_2, m_3, m_4 を $r_2 = m_2 W, r_3 = m_3 W, r_4 = m_4 W$ を満たすものとする。すると $w_1 = m_4 R, w_2 = (m_4 - m_2) R, w_3 = (m_4 - m_3) R$ となる。

ここで $0 < r_2 < r_3 < r_4$ であるため $m_2, (m_3 - m_2), (m_4 - m_3)$ はいずれも 1 以上でなければならない。しかし一つでも 2 以上のものがあれば、白の棒 R 本と赤の棒 W 本は同じ長さである（ともに長さ $m_4 R W$ となる）ことから、さらに小さい正方形を作ることができる。

例えば、 $m_2 = 1, m_3 = 3, m_4 = 4$ であるとき 4 辺の赤と白の棒の本数は

白 4R 本, 赤 W 本 白 3R 本, 赤 3W 本 白 R 本, 赤 4W 本

となる。ここで始めの 2 辺から白の棒を R 本、残りの 2 辺から赤の棒を W 本とっても同じ長さになり、各辺の赤と白の棒の本数は異なる。



各長方形を白の棒 R 本、赤の棒 W 本の長さとして、青の部分を取り除いても正方形ができる。

以上から

$$m_2 = m_3 - m_2 = m_4 - m_3 = 1 \Rightarrow m_2 = 1, \quad m_3 = 2, \quad m_4 = 3$$

となり、4 辺の赤と白の棒の本数は

白 3R 本, 赤 W 本 白 2R 本, 赤 2W 本 白 R 本, 赤 3W 本

となる。これらの棒の合計本数が 90 本となるため、

$$3R + (W + 2R) + (2W + R) + 3W = 6(W + R) = 90$$

$$\Rightarrow W + R = 15$$

$W + R = 15$ を満たし、かつ $1 < \frac{R}{W} < 2$ を満たす W, R は

$W = 7, R = 8$ のときのみ。よって $\frac{R}{W} = \frac{8}{7}$ である。