

問題：

A がコインを 6 枚、B がコインを 2 枚持っている。A の勝つ確率が $1/3$ のゲームをして、勝った方が負けた方からコインを 1 枚もらうことができる。どちらかがコインをすべて取るとゲームは終了。

このとき、A が B のコインをすべて取る確率を求めなさい。

解法：

A が B のコインをすべて取るためには、B がコインを 2 枚しか持っていない状態で A が 2 回続けて勝つしかない。B がコインを 2 枚しか持っていない時は以下の条件が成り立つときである。

- ・自然数 n に対してゲームを $2(n-1)$ 回目（偶数回）行った後。
- ・A, B の勝ち数は同じ。(A, B とも $n-1$ 回勝っている)
- ・常に (A の勝ち数) - (B の勝ち数) が 1 以下である。2 以上になると $2(n-1)$ 回目までに A の勝ちが決まる。
- ・常に (A の勝ち数) - (B の勝ち数) が -5 以上である。 -6 以下になると $2(n-1)$ 回目までに B の勝ちが決まる。

これらの条件を満たすゲームの勝敗の順序の個数を a_n とする。たとえば、 $n = 3$ であるとき、上の条件を満たすゲームの勝敗の順序を調べると、

ABAB, ABBA, BAAB, BABA, BBAA

の 5 通りであるため、 $a_3 = 5$ となる。

A の勝つ確率が $1/3$ 、B の勝つ確率が $2/3$ であるため、 $2(n-1)$ 回目に B がコインを 2 枚しか持っていない確率は

$$a_n \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{a_n 2^{n-1}}{3^{2n-2}}$$

この後の 2 回のゲームで A が 2 連勝すればすべてのコインを取ることができる。よってコインをすべてとる確率は

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n 2^{n-1}}{3^{2n-2}} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n 2^{n-1}}{3^{2n}}$$

となる。

a_n を求めるために、 $2(n-1)$ 回目のゲームの後で (A の勝ち数) - (B の勝ち数) が -2、-4 となる勝敗も考慮する必要がある、それぞれの勝敗の順序の個数をそれぞれ b_n, c_n とする。 $n = 3$ のときの勝敗の順序のうち (A の勝ち数) - (B の勝ち数) が -2

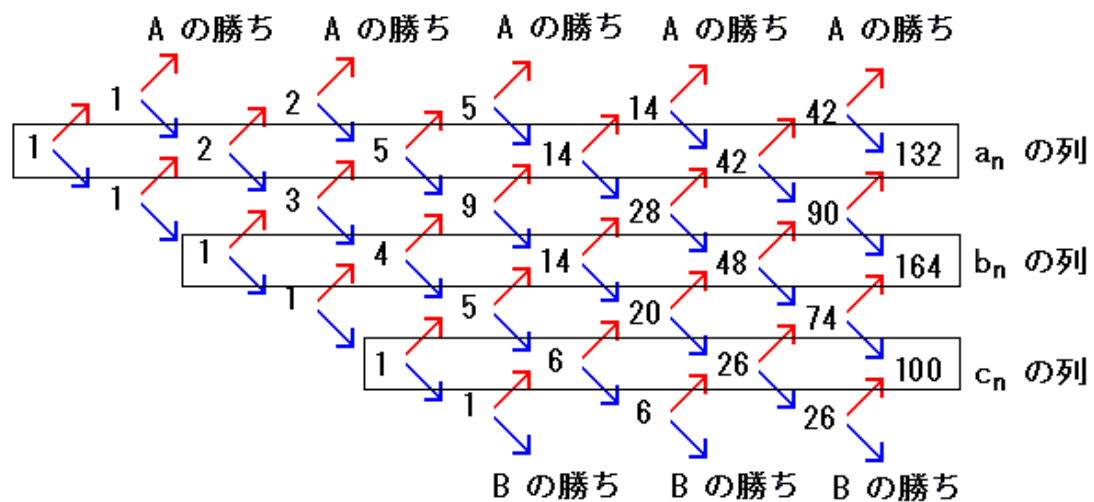
となるのは、

ABBB, BABB, BBAB, BBBA

の4通り。また (A の勝ち数) - (B の勝ち数) が -4 となるのは、

BBBB

の1通りしかいないため、 $b_3 = 4, c_3 = 1$ である。ゲームの勝敗の順序から a_n, b_n, c_n を求めると以下の通りになる。赤の矢印が A の勝ち、青の矢印が B の勝ちを表す。



ただし、 c_n は n が 3 以上でなければ数えられないため、以降の計算は $n \geq 3$ として考える。 n が 2 以下の場合のはのちに考える。

a_n, b_n, c_n の漸化式を作り、 a_n, b_n, c_n の一般式を求めていく。 $2n$ 回目までゲームが進み A, B の勝ち数が同じである場合、経過は以下のいずれかが成り立つ。

- ・ $2(n-1)$ 回までで A, B の勝ち数が同じで、次の 2 回で A, B が 1 回ずつ勝つ。この順序は 2 通りある。

- ・ $2(n-1)$ 回までで (A の勝ち数) - (B の勝ち数) が -2 であり、次の 2 回で A が 2 連勝する。

このことから、 a_n に関する漸化式は

$$a_{n+1} = 2a_n + b_n$$

となることがわかる。

この考え方を b_n, c_n に使うと

$$b_{n+1} = a_n + 2b_n + c_n$$

$$c_{n+1} = b_n + 2c_n$$

という漸化式がそれぞれ作られる。

この 3 式について

$$a_{n+1} - c_{n+1} = 2(a_n - c_n)$$

という式が得られるため、

$$a_n - c_n = 2^{n-3}(a_3 - c_3) = 2^{n-3} \cdot 4 = 2^{n-1} \quad (n \geq 3)$$

が成り立つ。また、

$$a_{n+1} \pm \sqrt{2}b_{n+1} + c_{n+1} = (2 \pm \sqrt{2})(a_n \pm \sqrt{2}b_n + c_n)$$

という式が得られるため、

$$a_n \pm \sqrt{2}b_n + c_n = (2 \pm \sqrt{2})^{n-3}(a_3 \pm \sqrt{2}b_3 + c_3) = (2 \pm \sqrt{2})^{n-1} \quad (n \geq 3)$$

(複合同順) が成り立つ。この式から

$$a_n + c_n = \frac{1}{2}\{(2 + \sqrt{2})^{n-1} + (2 - \sqrt{2})^{n-1}\} \quad (n \geq 3)$$

が得られるため

$$a_n = \frac{1}{2} \times 2^{n-1} + \frac{1}{4}\{(2 + \sqrt{2})^{n-1} + (2 - \sqrt{2})^{n-1}\} \quad (n \geq 3)$$

となることがわかる。

$n = 1, 2$ に対して、 $a_1 = 1, a_2 = 2$ となる。この値も上の a_n の式が成り立つため a_n の式は $n \geq 1$ でも成り立つ。

求めた a_n の式を

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n 2^{n-1}}{3^{2n}}$$

に代入し、まとめると以下の式が得られる。

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n 2^{n-1}}{3^{2n}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^{2n}} \times \left[\frac{1}{2} \times 2^{n-1} + \frac{1}{4} \{(2 + \sqrt{2})^{n-1} + (2 - \sqrt{2})^{n-1}\} \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{8} \times \frac{2^{2n}}{3^{2n}} + \frac{1}{8(2 + \sqrt{2})} \times \frac{2^n (2 + \sqrt{2})^n}{3^{2n}} + \frac{1}{8(2 - \sqrt{2})} \times \frac{2^n (2 - \sqrt{2})^n}{3^{2n}} \right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{8} \times \left(\frac{4}{9} \right)^n + \frac{2 - \sqrt{2}}{16} \times \left(\frac{4 + 2\sqrt{2}}{9} \right)^n + \frac{2 + \sqrt{2}}{16} \times \left(\frac{4 - 2\sqrt{2}}{9} \right)^n \right\} \end{aligned}$$

一般に $|\alpha| < 1$ である実数 α について

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n = \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

が成り立つ。上の式の中の $4/9$, $(4+2\sqrt{2})/9$, $(4-2\sqrt{2})/9$ はいずれも絶対値が1未満であるため、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n = \frac{4/9}{1-4/9} = \frac{4}{5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4+2\sqrt{2}}{9}\right)^n = \frac{(4+2\sqrt{2})/9}{1-(4+2\sqrt{2})/9} = \frac{4+2\sqrt{2}}{5-2\sqrt{2}} = \frac{28+18\sqrt{2}}{17}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4-2\sqrt{2}}{9}\right)^n = \frac{(4-2\sqrt{2})/9}{1-(4-2\sqrt{2})/9} = \frac{4-2\sqrt{2}}{5+2\sqrt{2}} = \frac{28-18\sqrt{2}}{17}$$

となる。このことから

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n 2^{n-1}}{3^{2n}} &= \frac{1}{8} \times \frac{4}{5} + \frac{2-\sqrt{2}}{16} \times \frac{28+18\sqrt{2}}{17} + \frac{2+\sqrt{2}}{16} \times \frac{28-18\sqrt{2}}{17} \\ &= \frac{1}{10} + \frac{10-5\sqrt{2}}{136} + \frac{10+5\sqrt{2}}{136} \\ &= \frac{1}{10} + \frac{5}{34} \\ &= \frac{21}{85} \end{aligned}$$

となり、確率を求めることができる。

ちなみに

$$b_n = \frac{\sqrt{2}}{4} \left\{ (2+\sqrt{2})^{n-1} - (2-\sqrt{2})^{n-1} \right\} \quad (n \geq 2)$$

$$c_n = -\frac{1}{2} \times 2^{n-1} + \frac{1}{4} \left\{ (2+\sqrt{2})^{n-1} + (2-\sqrt{2})^{n-1} \right\} \quad (n \geq 3)$$

である。